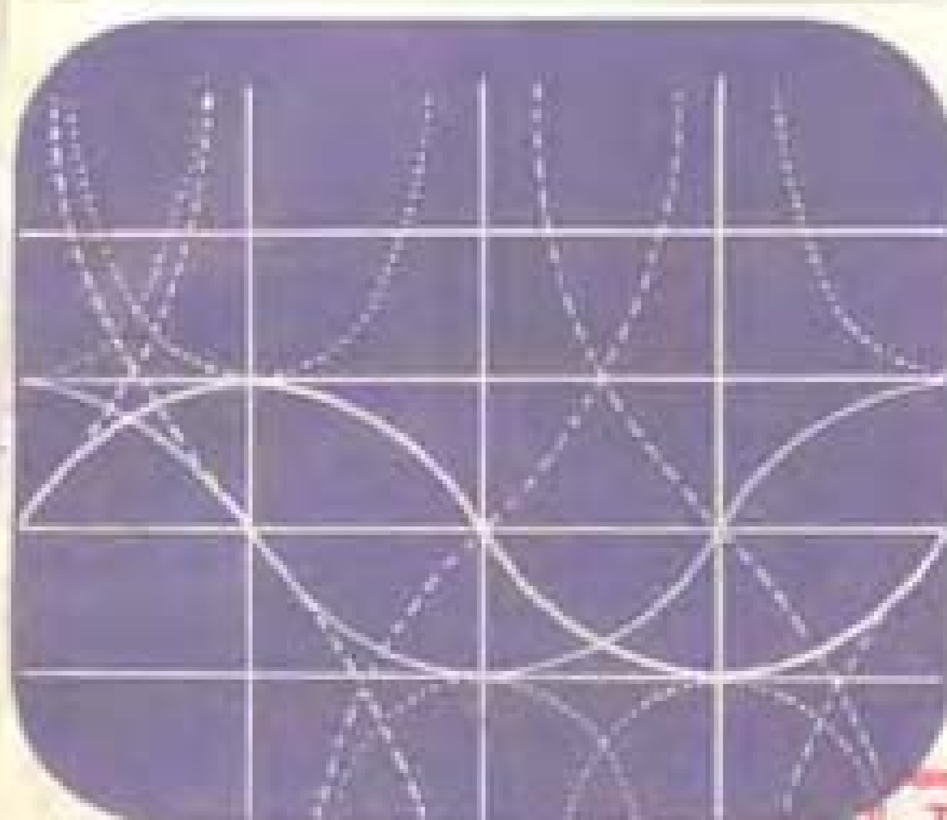
821/125
33441



图书专用章

常庚哲

抽屉原则及其他

上海教育出版社

821/125

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

抽屉原则及其他

常庚哲

上海教育出版社

抽屉原则及其他

常庚哲

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　上海崇明印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张1.875　字数38,000
1978年12月第1版　1978年12月第1次印刷
印数1—80,000本

统一书号：7150·1967　定价：0.15元

前　言

“把 $n+1$ 个或者更多的物体放到 n 个集合之中，那末，至少有一个集合里要放进两个或者更多的物体”，这就是抽屉原则的最简单的形式．抽屉原则又叫重迭原则，虽然它的正确性十分明显，很容易被不具备多少数学知识的人所接受，但是，加以灵活运用，可能得到一些意想不到的结果．各种形式的抽屉原则，在初等数学乃至高等数学中，经常地被采用着．

本书以抽屉原则为主题，着重介绍了它在初等数论中的一些应用．因此，书中不得不引进“初等数论”中的一些基本知识，例如：同余式，用有理数来逼近无理数，不定方程，数的几何等等，但并不对这些作进一步的讨论．作者其所以作出这种安排，是希望读者不单单知道什么是“抽屉原则”——这本来是不难做到的，还能接触到一些在中学数学教材中读不到的内容，以扩大他们的知识面，增强他们学习数学的兴趣．

1978 年 4 月，在全国部分省市中学生数学竞赛举行的前夕，作者曾以《抽屉原则》为题，在安徽省几个城市对中学生作过讲演．本书就是在当时讲稿的基础上扩充而成的．在编写本书第七节佩尔方程的时候，征得严士健同志的同意，吸收了他发表在《数学通报》1957 年第 7 期上的一篇文章的部分内容，特此志谢．冯克勤、单墫、杨劲根和李克正同志给作者提供了一些有趣的例题和习题，单墫同志还详细阅读了第七节的初稿，提出了若干有益的建议，作者对他们表示衷心的感谢！

由于作者水平的限制，错误和不妥之处，恐难避免，切望读者批评指正．

作　者

于 1978 年 7 月

目 录

前言
一、第一堂算术课……………………………………… 1
二、抽屉原则 ……………………………………………2
三、一些例子 ……………………………………………4
四、剩余类…………………………………………………14
五、有理数和无理数……………………………………20
六、不定方程………………………………………………27
七、佩尔方程………………………………………………30
八、面积的重迭原则……………………………………38
练习题………………………………………………………45
练习题解答概要…………………………………………48

一、第一堂算术课

新学年开始了.

开学的那一天，红星小学一年级一班第一堂就是算术课. 任课的张老师，是一位很有经验、很有水平的老教师. 她讲课深入浅出，活泼生动，凡是长期听张老师讲课的同学，总是不知不觉地对数学发生了浓厚的兴趣.

张老师走进课堂，全班同学起立，向这位辛勤的园丁致敬. 环视那几十张陌生而可爱的小脸，张老师心里充满了无限的喜悦. 她用简单而诚挚的语言向新同学表示祝贺和欢迎，接着说道："我校今年招收了三百七十名一年级新生，他们都年满六岁但还不到七岁. 我说呀，这么多的新同学中间，一定有两个人是同年、同月、同日出生的. 小同学们，你们说对不对？"

对于这个新奇的结论，大家感到有趣而又惊讶. 同学们低声地互相议论起来了.

"张老师知道我们每一个人的生日了吗？"

"不会的. 她今天同我们才头一次见面，连我们的名字恐怕都叫不上来."

"……"

"张老师一定查看过我们的报名登记表了！"

这一句话恰巧被张老师听见了，她笑着说："我没有看过你们的登记表，而且，完全不必要看这些表，就可以得出这个

结论。”

同学们更惊奇了！

张老师接着说："同学们想想看，把十只苹果放到九个抽屉中去，无论怎么放，这九个抽屉中一定有一个抽屉里放了两只或两只以上的苹果．你们说对吗？"

"对！对！"同学们齐声回答．小朋友所具备的常识，就足以使他们明白：要是每个抽屉中最多只有一只苹果的话，那么九个抽屉至多才装着九个苹果．

"好！我们把一年中的三百六十五天（闰年三百六十六天）的每一天，看成一个抽屉，而把三百七十个新同学中的每一个人看成一只"苹果"．按照"苹果"出生的日子，把他们放到对应的抽屉中去．由于"苹果"数目多于"抽屉"数目，就能知道：一定有一个"抽屉"中，至少放着两只"苹果"．这就是说，至少有两个同学的生日相同．再根据同学们的年龄的差别不超过一岁，所以，这两个同学一定是同年、同月、同日出生的了．"

小朋友们恍然大悟，会心地微笑了。

二、抽屉原则

运用第一节中采用过的推理方法，我们还可以证明如下的更加令人惊讶的结论．

根据常识，一个人的头发的根数不会超过二十万．因此，在一个拥有二十多万人口的城市中，一定有那么两个人，他们的头发的根数相同．

推理方法如下：我们设置二十万零一个"抽屉"，并且对

每一个"抽屉"依次标上从0, 1, 2, 3, … 直到200000之中的一个号码. 按各人头上头发的根数归入相应的一个"抽屉", 比如说, 如果张乐平同志画的三毛生活在这个城市, 那么他就被归为标有号码"3"的那个"抽屉"; 我们没有理由排除这个城市中有留着光头的人, 所以必须设置"0"号"抽屉". 由于人的数目多于"抽屉"的数目, 可以断定, 一定至少有两个人与同一"抽屉"相对应, 这两个人自然就有同样多根头发了.

容易看到, 这从本质上来说, 仍然是前节中"十只苹果"和"九个抽屉"的推理方法. 这种推理的正确性, "显然"到了连小学一年级的学生也能完全接受. 如果把这种推理推广到更加一般的形式, 其正确性也完全可以被不具备多少数学知识的人所认识.

怎样把这种推理推广到一般形式呢? 我们来注意以下两点.

1. 如果将"苹果"换成"皮球"、"铅笔"或"数", 同时将"抽屉"相应地换成"袋子"、"文具盒"或"数的集合", 那么仍旧可以得出相同的结论.

这就是说: 推理的正确性与具体的对象没有关系. 我们把一切可以同"苹果"互换的对象称之为"元素", 而把一切可以同"抽屉"互换的对象称之为"集合", 从而得知: 十个元素以任意的方式归入九个集合之中, 那么其中一定有一个集合中至少包含两个元素.

2. "苹果"和"抽屉"的具体数目是无关紧要的, 只要苹果(元素)的个数比抽屉(集合)的个数多, 那么推理照样成立.

于是, 我们就可以把"十只苹果"和"九个抽屉"的推理方法, 推广到下述一般形式:

原则一 把多于 n 个的元素按任一确定的方式分成 n 个

集合，那么一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素.

原则一还有以下更加一般的形式:

原则二 把多于 $m\times n$ 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，那么一定有一个集合中含有 $m+1$ 个或 $m+1$ 个以上的元素.

这是很明显的，因为若每个集合中所含元素的数目均不超过 m，那么这 n 个集合所含元素个数就不会超过 $m\times n$.

原则三 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合，那么至少有一个集合中仍含无穷多个元素.

这也是很显然的，这是因为，如果每个集合中只含有穷多个元素，那么有穷个集合只能包含有穷个元素.

以上三个原则都称为抽屉原则. 看上去，它们都是非常简单的. 可是，正是这样一些很简单的原则，在初等数学乃至高等数学中，有着许多应用. 巧妙地运用这些原则，可以很顺利地解决一些看上去相当复杂、甚至觉得简直无从下手的数学题目.

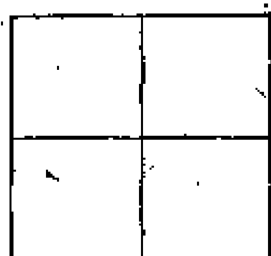
三、一 些 例 子

在本节，我们运用抽屉原则，来证明初等数学中的一些题目.

[例 1] 在边长为 1 的正方形内任意放置五个点，求证：其中必有两点，这两点之间的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

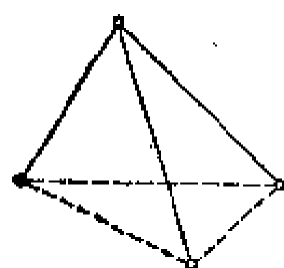
证明 将这个正方形的两对对边上的中点连接起来，把它分成四个大小相等的小正方形(图 1). 在大正方形里任放

五个点，就相当于把五个点以任一确定的方式投放在这四个小正方形中．这里，我们把每一个小正方形看成一个“抽屉”，于是问题就归结为把五个元素(点)放入四个“抽屉”(小正方形)．根据前节的原则一，必有一个小正方形，其中包含两个或两个以上的点，对于其中的两点，它们间的距离不会超过小正方形对角线的长度(即大正方形对角线长度的一半)，即不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．


图 1

[例 2] 空间中有六个点，其中任何三点都不共线，任何四点都不共面．在每两点之间连起直线段之后，将每一条这样的线段或涂上红色，或涂上蓝色．求证：不论如何涂色，一定存在一个三角形，它的三边有相同的颜色．

证明 从任一点出发，到其余五个点，共可联五条线段．由于这五条线段已被红、蓝两种颜色所涂染，如果把红线段分入一个“抽屉”，蓝线段分入另一个“抽屉”，于是问题就归结为五个元素(线段)，即多于2×2个元素，分到 2 个“抽屉”(蓝色或红色)，按照原则二，其中至少有三条线段被分入同一“抽屉”，即染有相同的颜色，例如说是红色(图 2 中的实线)．我们来考察这三条由同一点出发，具有相同颜色的线段，把这三条线段的另外三个端点两两联接起来，就构成了图 2 所示的虚线三角形．如果有一条虚线被涂成红色，那么它就与两条实线组成一个红边三角形；如果这三条虚线中一条红边也没有，那么它们本身就组成一个蓝边三角形了．


图 2

[例 3] 在边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，证

明：在以这些点为顶点的许许多多三角形中，必有一个三角形，它的面积不超过$\frac{1}{8}$．（1963 年北京市数学竞赛试题）

证明 用三条平行于上下底边的直线，把正方形分成四个大小相等的长方形．九个点任意放入这四个长方形中，根据原则二，即多于 2×4 个点放入四个长方形中，则至少有 $2+1$ 个点（即三个点）落在某一个长方形之内．现在，特别取出这个长方形来加以讨论（图 3）．

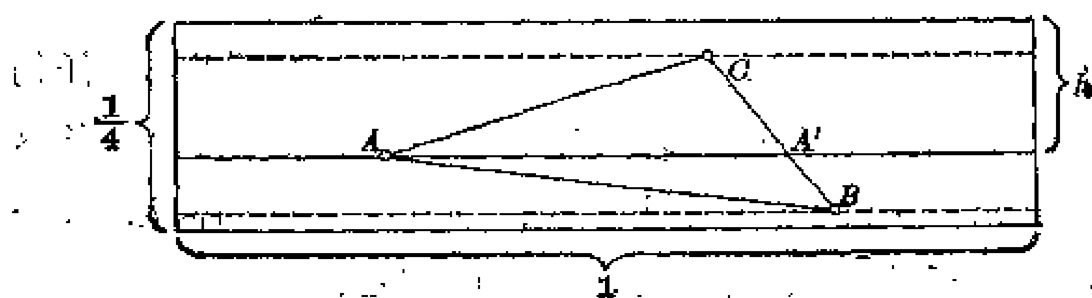


图 3

把落在这长方形中的三点记为 A、B、C，通过这三点分别作平行于底边的直线．由图 3 显然可见

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \triangle AA'B \text{ 的面积} + \triangle AA'C \text{ 的面积}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\times1\times h+\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{1}{4}-h\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$

这样就得到了需要证明的结论．

［例 4］ 一个正方形被分成了 $15\times15=225$ 个大小相同的小方格（图 4）．在每一个小方格中，任意填写 1, 2, 3, …, 55, 56 中的一个数．求证：一定能够找到四个小方格，它们的中心构成一个平行四边形的四个顶点，并且这平行四边形各条对角线两端的两个小方格中的数字之和相等．

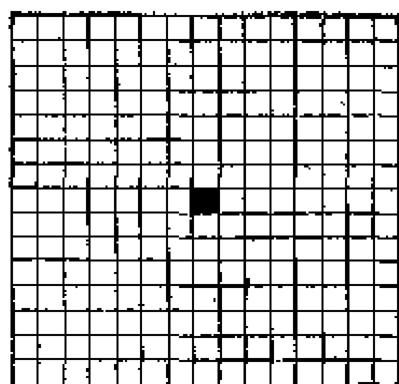


图 4

证明　由于 15 是一个奇数，所以一定有一个小方格处在大正方形的中心位置，我们把它称为"中心小方格"，在图 4 中用黑色标出．把关于中心小方格为中心对称的每两个小方格配成一对，这样，便把除去中心小方格之外的 224 个小方格配成了 112 对．在任一对这种小方格中，令 x 表示其中一个小方格中所放的数，x^* 表示其对称的另一小方格中所放的数，由假设可知

$$1 \leqslant x \leqslant 56, \quad 1 \leqslant x^* \leqslant 56.$$

所以

$$2 \leqslant x + x^* \leqslant 112.$$

这就是说，任何一对小方格中两数之和不外乎

$$2, 3, 4, \cdots, 110, 111, 112$$

这 111 种可能．但是，我们共有 112 对小方格．根据原则一，必有至少两对小方格，使得各对中两数之和为同一数字．每对小方格的中心的联线，假如它们不重合的话，必在中心小方格的中心处互相平分，所以这时四个小方格的中心是一个平行四边形的四个顶点．

把联线互相重合的情形，看作是一个蜕化了的平行四边形，可以认为，在这种情况下，结论仍然是正确的．

[例 5]　从自然数集

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots, 99, 100\}$$

中，随意选出 51 个数来，求证：其中一定有两个数，它们中的某一个是另外一个的整倍数。

证明　首先注意，一个正整数要么本身是一个奇数，要么是一个偶数．若是一个偶数时，则经过反复地提取因数"2"，最后总能表示为：奇数 $\times 2^l$（其中 $l=1, 2, 3, \cdots$）的形式．并且，这个奇数决不会超过原数的一半．例如

$$16=8\times2=4\times2^2=2\times2^3=1\times2^4,$$

$$24=12\times2=6\times2^2=3\times2^3,$$

如果容许 $l=0$，那么奇数也被包括在上述一般形式之中．

现在，把 1 到 100 的全部整数，分成下面的 50 个集合：

$$\mathfrak{M}_1=\{1, 1\times2, 1\times2^2, 1\times2^3, 1\times2^4, 1\times2^5, 1\times2^6\},$$

$$\mathfrak{M}_2=\{3, 3\times2, 3\times2^2, 3\times2^3, 3\times2^4, 3\times2^5\},$$

$$\mathfrak{M}_3=\{5, 5\times2, 5\times2^2, 5\times2^3, 5\times2^4\},$$

$$\mathfrak{M}_4=\{7, 7\times2, 7\times2^2, 7\times2^3\},$$

……

$$\mathfrak{M}_{25}=\{49, 49\times2\},$$

$$\mathfrak{M}_{26}=\{51\},$$

……

$$\mathfrak{M}_{50}=\{99\}.$$

很明显，1, 2, …, 100 这一百个整数没有遗漏地被放入了这五十个集合，并且，同一个数字决不会出现在两个不同的集合中（读者可自行证明这一结论）．因此，不论用何种方式从中取出 51 个数时，必然有至少两个数是出自同一集合的，而同一集合中的两数，大数必定是小数的整倍数．

在讨论下一个例子之前，我们介绍几个数学中的基本概

念. 按照一定顺序排列起来的数串

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\ \cdots, \tag{1}$$

称为一个数列. 如果其中包含无穷多项, 称之为无穷数列; 若只含有穷项, 则称为有穷数列. 无穷数列和有穷数列统称为"数列". 每个 a_i 称为数列的一项, 自然数 i 叫做这一项的足标, 它指示着这一项在数列中所处的位置. 例如

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$ (其中 $a_n=n$);

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$ (其中 $a_n=(-1)^{n-1}$);

$1,\ \sqrt{2},\ \dfrac{1}{2},\ -1,\ 0,\ 2,$

都是数列, 其中头两个是无穷数列, 最后一个是有穷数列(因为它只含六项).

如果数列(1)适合

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots,$$

称(1)为一个上升数列, 如果上述不等式中每一个"$\leqslant$"都成立着不等号"$<$", 则称(1)为严格上升数列. 类似地, 如果数列(1)适合

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant\cdots,$$

就说(1)是一个下降数列, 如果上述不等式的每一个"$\geqslant$"都成立着不等号"$>$", 则称(1)为严格下降数列. 上升数列和下降数列统称单调数列. 例如, 前面的三个数列的头一个是单调数列, 并且是严格上升数列; 而后两个数列都不是单调数列.

从数列(1)中取出一部分项来, 但不改变它们在原数列(1)中的先后顺序, 这样就得到了一个新的数列, 它叫做数列(1)的一个子数列. (1)的任一个子数列可以这样来表示:

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ a_{i_3},\ \cdots,\ a_{i_n},\ a_{i_{n+1}},\ \cdots,$$

其中的足标必须适合

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n < i_{n+1} < \cdots,$$

这就是说，子数列中项的先后顺序必须保持它们在原数列中的先后顺序．注意以下两种极端情况：数列(1)本身一定是(1)的子数列；任意抽出(1)的某一项所组成的数列必是(1)的子数列．很显然，这两种极端情况完全符合子数列的定义．

有了上述这些准备之后，就可以继续我们的讨论了．

[例6] 任意给定由 n^2+1 个项所组成的实数列，求证：从中一定可以挑出由 $n+1$ 个项所组成的单调子数列．

为了具体地了解这个结论说的是什么内容，在证明之前，我们来看几个特殊的情况．当 $n=1$ 时，$n^2+1=2, n+1=2$，这就是说：任意给定两个项组成的实数列，从中一定可以取出由两个项组成的单调子数列．这是不证自明的，因为任何两个实数所组成的数列一定是单调数列．当 $n=2$ 时，$n^2+1=5$，$n+1=3$，这就是说：任意给定由五个项组成的数列，从中一定可以取出有三个数组成的单调子数列．即使在这种 n 相当小的情形，结论的正确性已经不是显而易见的了．

证明 把原数列记为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{n^2},\ a_{n^2+1}.$$

将以 a_i 作为首项的，项数最多的下降数列的项数记为 N_i．由于单单是一个 a_i 就可组成一个下降子数列，所以 $N_i \geqslant 1$．这就是说，$N_1, N_2, \cdots, N_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个正整数．如果其中某一个大于或等于 $n+1$，那么结论就已经成立了，因为我们这时即可找出一个含有 $n+1$ 项的下降子数列．所以，只须讨论另外一种情况，即：

$$1 \leqslant N_i \leqslant n \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n^2+1)$$

的情况．当 n^2+1 个自然数 N_i 只呈现 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 种可能时，由原则二可知，它们之中至少有 $n+1$ 个数相等，设为

$$N_{i_1}=N_{i_2}=\cdots=N_{i_{n+1}}, \tag{2}$$

其中足标适合

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}\leqslant n^2+1,$$

现在我们来证明：子数列

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_{n+1}}$$

是严格上升数列．可以用反证法．假若

$$a_{i_1}\geqslant a_{i_2},$$

那么，以 a_{i_1} 为头的，具有最大项数的下降子数列，起码要比以 a_{i_2} 为头的，具有最大项数的下降子数列多一个项．也就是说，应当有

$$N_{i_1}\geqslant N_{i_2}+1.$$

这与等式(2)矛盾．所以，只能是 $a_{i_1}<a_{i_2}$．同理可证

$$a_{i_1}<a_{i_2}<a_{i_3}<\cdots<a_{i_{n+1}}.$$

这就是说：在原数列不包含由 $n+1$ 个项所组成的下降子数列的情况下，我们证明了原数列一定含有由 $n+1$ 个项所组成的严格上升子数列．所需的结论就完全证明了．

[例 7]　一个国际社团的成员来自六个国家，共有 1978 人，用 1, 2, …, 1977, 1978 来编号．试证明：该社团至少有一个成员的编号与他的两个同胞的编号之和相等，或是其一个同胞的编号的两倍．（1978 年第二十届国际中学生数学竞赛试题）

证明　本题与下列问题完全相当："把 1, 2, 3, …, 1977, 1978 按任意方式分成六组，则必有一组有这样的性质：其中至少有一个数，或是等于同一组中其他两数之和，或是等于另一数的两倍．"

用反证法来证明这一结论．假设任一组数都不具备上述性质，那么由此可推知，每一组中的数都具备下列性质：

同一组数中任何两数之差必不在这个组中. (*)

这是因为,若 a, b 和 $b-a$ 这三数在同一组中, 那么由等式

$$a+(b-a)=b$$

可知,这一组数已经具备欲证的性质了.

由 $\frac{1978}{6}>329$, 故根据原则二,可以肯定有一个数组 A, 其中至少含 330 个数. 现从 A 中任意取出 330 个数来, 记其中最大的那一个数为 m_1. 把 m_1 减去其余的 329 个数, 得到的 329 个数既是正整数又小于 1978, 而且, 由性质(*)可知, 它们必不在组 A 中,即应属于其余五个数组. 又由 $\frac{329}{5}>65$, 再根据原则二,可以肯定有一个数组 B, 其中至少含上述 329 个中的 66 个数. 再从 B 中任取上述 329 个数中的 66 个来, 记其中最大的那一个为 m_2. 把 m_2 减去其余 65 个数, 得出新的 65 个数,由性质(*), 它们必不属于 B; 现在指出, 这 65 个数也不会属于 A, 假若其中有某一个数 (m_2-b) 属于 A, 因 m_2 与 b 可以写为:

$$m_2=m_1-a_1; \qquad (a_1 \text{ 属于 } A)$$

$$b=m_1-a_2, \qquad (a_2 \text{ 属于 } A)$$

这将导致

$$a_2-a_1=(m_1-a_1)-(m_1-a_2)=m_2-b$$

属于 A, 这就同 A 具备性质(*)的假设相违背. 这就是说,这 65 个数必属于其余四个数组. 由 $\frac{65}{4}>16$, 根据原则二又可断言, 必有一个数组 C 至少含有上述 65 个数中的 17 个数, 仍从 C 中任取上述 65 个数中的 17 个, 记其最大者为 m_3. 把 m_3 减去其余 16 个数字,而得出新的 16 个数; 仿照前面的推理可以证明,它们既不属于 C, 也不会属于 B 与 A, 而只能

属于其余三个数组 D, E, F 之一. 由于 $\frac{16}{3}>5$, 根据原则二, 可以设组 D 中至少含有这16个数中的6个数……, 末了, 可以断言在最后一个数组 F 中含有两个数, 其中的大数减去小数所得之差, 一方面是不超过1978的正整数, 同时又不属于 A, B, C, D, E, F 这六个数组中的任何一个, 这显然是一个矛盾! 这个矛盾说明题目的结论是正确的, 证完.

* * *

零散的例子还很多,不再一一列举了. 从以上七个例题, 读者可以看到, 虽说"抽屉原则"容易理解, 而且解题过程中并没有用到什么高深的数学知识, 但是, 解题时需要相当灵活的技巧. 最关键的一着是"制造抽屉", 这要求具备代数、几何、数论等方面的坚实的基础知识. 拿例1来说吧, 如果用正方形的两条对角线把它分成四个全等的等腰直角三角形(图5), 把每一个直角三角形当成一个"抽屉", 依照原则一, 虽然仍可断言五个点中必定至少有两点落在同一个三角形之上, 但是无法作出它们之间的距离不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的结论. 所以, 只有重视基础知识的学习和基本技能的训练; 牢固而且灵活地掌握代数、几何、三角知识, 才能成为制造"抽屉"的能工巧匠.

在下面的各节中, 将不断地介绍一些新鲜的数学知识(这些知识本身也就是数学中一些最基本、最重要的内容), 然后在新的知识领域内继续运用抽屉原则, 进一步得出一些有趣的结论.

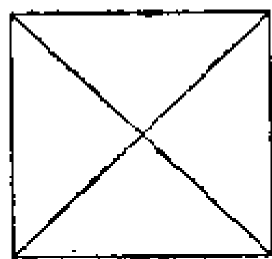


图 5

四、剩余类

先从两个具体的例子谈起.

[例 1] 在坐标平面上，我们把两个坐标都是整数的点称为整点. 对于任意给定的五个整点，求证其中一定有两个点，使得其联线的中点仍为整点.

分析 两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的联线的中点是$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 当$x_1$, x_2与y_1, y_2均为整数时，为了保证$\frac{x_1+x_2}{2}$和$\frac{y_1+y_2}{2}$均为整数，必须而且只须(x_1+x_2)和(y_1+y_2)都是偶数. 亦即x_1和x_2以及y_1和y_2有相同的奇偶性. 因此，这里先来讨论平面整点的两个坐标的奇偶性的各种可能的情况. 任何一个平面整点，可归为下列四种类型之一:

(奇，奇)，(奇，偶)，(偶，奇)，(偶，偶).

当任给五个平面整点时，根据原则一，一定至少有两个点属于同一类型.

证明 设五个整点中，属于同一类型的两个整点是(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，这就是说，x_1和x_2以及y_1和y_2有相同的奇偶性，所以x_1+x_2和y_1+y_2都是偶数，亦即$\frac{x_1+x_2}{2}$和$\frac{y_1+y_2}{2}$都是整数. 这就证明了，(x_1, y_1)与(x_2, y_2)的联线的中点$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$仍为整点.

[例 2] 同样地，在空间直角坐标系中，我们把三个坐标

都是整数的点称为整点．对于空间中任意给定的 28 个整点，求证其中一定有两个点，使其联线上的三等分点仍为整点．

读者一定会认为，例 2 和例 1 是属于同一性质的问题，因此用大致相同的方法就能加以解决．这种看法是正确的．不过，再想用什么"奇数"、"偶数"来说明它，那却是不可能的了．

为了简明地说清楚这一大类问题，我们首先来介绍"同余"和"剩余类"的概念，而把证明例 2 放在本节的最后．

首先介绍一个函数 $[x]$．设 x 是任一实数，则用 $[x]$ 来表示适合下列不等式的整数：

$$[x] \leqslant x < [x]+1.$$

这个定义意味着以下三点：

(i) $[x]$ 是一个整数；

(ii) 整数 $[x]$ 不超过 x；

(iii) 比 $[x]$ 再大的整数，哪怕是 $[x]+1$，就已大于 x 了．

把这三条合在一起，则是：$[x]$ 是不超过 x 的最大的整数．我们称 $[x]$ 为 x 的整数部分．例如

$$[5]=5,$$
$$[0.9999]=0,$$
$$[-3.6]=-4,$$
$$[-7]=-7;$$

如果 π 表示圆周率，那么

$$[\pi]=3,$$
$$[-\pi]=-4.$$

函数 $[x]$ 是数学中常用的一个重要函数．

现在，设 m 是一个正整数，a 为任一整数，令

$$q=\left[\frac{a}{m}\right],$$

所以，依照定义，有

$$q\leqslant\frac{a}{m}<q+1.$$

用正数m遍乘上不等式，得到

$$mq\leqslant a<mq+m.$$

再令整数

$$r=a-mq.$$

于是

$$0\leqslant r<m.$$

这就是说，m 为任一正整数，a 为任一整数，则必存在整数 q 和 r，使得

$$a=mq+r,\qquad (其中\ 0\leqslant r<m)$$

这里，q 称为m除a所得的**不完全商**，而 r 称为m除a所得的**余数**．当 $r=0$ 时，称m可以整除a，或称a可被m所整除，记为 $m|a$．例如，当 $m=5$ 时，

$$15=5\times3+0,\qquad 所以\ 5|15,\ 余数为\ 0;$$

$$21=5\times4+1,\qquad 余数为\ 1;$$

$$-21=5\times(-5)+4,\qquad 余数为\ 4.$$

一般地说，用正整数m去除任一整数时，余数不外乎

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

这样m种情况．

设 a，b 是两个整数，如果用m去除它们，将有整数 q_1，q_2 及 r_1，r_2，使得

$$a=mq_1+r_1,\qquad(1)$$

$$b=mq_2+r_2,\qquad(2)$$

并且 $0\leqslant r_1<m$，$0\leqslant r_2<m$；当 $r_1=r_2$ 时，称 a 和 b **关于模 m 同余**，用同余式

$$a \equiv b \pmod{m}$$

来表示．例如

$$15 \equiv 0 \pmod{5},$$
$$14 \equiv 9 \pmod{5},$$
$$18 \equiv -6 \pmod{8},$$

等等．关于模 m 同余，还可以用另一方式来刻划，这就是：$a \equiv b \pmod{m}$ 的必要充分条件是 $m \mid (b-a)$．关于这一性质，可以证明如下：

先证必要性．当(1)和(2)中的 $r_1 = r_2$ 时，有

$$\begin{aligned} b-a &= (mq_2+r_2)-(mq_1+r_1) = mq_2 - mq_1 \\ &= m(q_2-q_1), \end{aligned}$$

由于 q_2-q_1 是整数，所以 $m \mid (b-a)$．

再证充分性．设 $m \mid (b-a)$，故有整数 q，使得 $b-a = mq$，亦即 $b = a+mq$，由于(1)，便有

$$b = a+mq = mq_1+mq+r_1 = m(q_1+q)+r_1,$$

因为 q_1+q 为整数，故上式表明：用 m 去除 b 时余数也是 r_1，所以 b 和 a 关于模 m 是同余的．

以一个任意固定的正整数 m 为模，可以把全体整数按照余数来分类：凡用 m 来除有相同余数的整数都归为一类．这样，便可把全体整数分成 m 个类：

$$\{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \cdots,\ \{m-1\},$$

第一类中包含能被 m 除尽的全部整数，第二类中包含被 m 除余 1 的全部整数，如此等等．这 m 个类称为**关于模 m 的剩余类**．再强调一次：关于模 m 的剩余类只有 m 个．

剩余类的概念，在日常生活中，是见得很多的：用 2 作模，可把所有整数分为两大类，这就是通常人们所说的双数和单数；用 7 作模，就把无穷尽的日子分成了七大类，即：星期

日，星期一，……，星期六.人们按照这一分类来安排学习、劳动和休息.

[例 3] 任意给定正整数 m，求证：一定有 m 的某一个整倍数，它完全由 0 和 1 两个数字所组成.

证明 考察正整数列：

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \cdots,\ \underbrace{111\cdots1}_{m+1\text{个}}.$$

我们把它们归入关于模 m 的剩余类中．前已指出，关于模 m 的剩余类只有 m 个，而上述 $m+1$ 个数归入 m 个剩余类时，依照原则一，其中一定至少有两个数，例如说 a 和 b（不妨设 $a<b$），属于同一剩余类，即 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$．这就是说，$b-a$ 是 m 的一个整倍数．另一方面，根据 a 和 b 的构成可知，$b-a$ 具有下列形式：

$$11\cdots100\cdots0,$$

这就是我们要证的结论.

[例 4] 设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 是 n 个任意给定的整数．求证：其中一定可以找到紧连在一起的若干个数，使得它们的和可被 n 整除.

证明 考察数列：

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n. \qquad (3)$$

若这 n 个整数中至少有一个能被 n 所整除，那么结论就不证自明了．所以，设上述数列中没有一个是 n 的整倍数．于是，当我们把它们分到关于模 n 的剩余类中去的时候，它们只能进入以下 $n-1$ 个类：

$$\{1\},\ \{2\},\ \cdots,\ \{n-1\}.$$

可是数列(3)中有 n 个整数，按照原则一，数列(3)中至少有两个数 $a_1+\cdots+a_k$ 和 $a_1+\cdots+a_k+\cdots a_l$ 属于同一类($l>k$)，即

$$(a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_l)-(a_1+\cdots+a_k)=a_{k+1}+\cdots+a_l$$

可被 n 整除，这正是我们想要证明的结论。

现在回头来解答本节的例 2.

例 2 的证明. 以 3 为模，可将全体整数分为三个剩余类。因此，一切空间整点 (x, y, z)，可以按照其每一个坐标所属的剩余类的三种情况，划分为 $3\times3\times3=27$ 类。任给 28 个空间整点，按照原则一，应至少有两点——记为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2)——属于同一类中，这就是说

$$x_1\equiv x_2 \pmod 3,$$
$$y_1\equiv y_2 \pmod 3,$$
$$z_1\equiv z_2 \pmod 3,$$

或者说，三个数

$$x_2-x_1, \quad y_2-y_1, \quad z_2-z_1$$

都可被 3 整除。由解析几何可知：将 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 的联线三等分的两个分点是

$$(x_1, y_1, z_1)+\frac{1}{3}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$
$$=\left(x_1+\frac{x_2-x_1}{3}, y_1+\frac{y_2-y_1}{3}, z_1+\frac{z_2-z_1}{3}\right);$$
$$(x_1, y_1, z_1)+\frac{2}{3}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$
$$=\left(x_1+2\cdot\frac{x_2-x_1}{3}, y_1+2\cdot\frac{y_2-y_1}{3}, z_1+2\cdot\frac{z_2-z_1}{3}\right).$$

显然，它们的各个坐标都是整数，因此这两个点都是整点。

本例证明中的基本方法，在第七节定理三的证明中还要采用。

同余关系具有以下一些基本性质。

1. $a\equiv a \pmod m$ （反身性）.

2．若 $a\equiv b \pmod{m}$，则 $b\equiv a \pmod{m}$（对称性）．

3．若 $a\equiv b \pmod{m}$，$b\equiv c \pmod{m}$，则 $a\equiv c \pmod{m}$（传递性）．

上述三条性质的证明，请读者自行完成．

4．若 $a\equiv\alpha \pmod{m}$，$b\equiv\beta \pmod{m}$，则

$$a+b\equiv\alpha+\beta \pmod{m};$$

$$ab\equiv\alpha\beta \pmod{m}.$$

这就是说，同余式也象等式一样，可以两边相加或相乘．

证明 因为 $a\equiv\alpha \pmod{m}$ 和 $b\equiv\beta \pmod{m}$，故存在整数 s 和 t，使得

$$a=\alpha+sm,\quad b=\beta+tm.$$

于是

$$a+b=\alpha+\beta+sm+tm=\alpha+\beta+(s+t)m,$$

这正表明

$$a+b\equiv\alpha+\beta \pmod{m};$$

此外，还有

$$\begin{aligned}ab&=(\alpha+sm)(\beta+tm)=\alpha\beta+\alpha tm+\beta sm+stm^2\\&=\alpha\beta+(\alpha t+\beta s+stm)m,\end{aligned}$$

这里 $\alpha t+\beta s+stm$ 是一整数，故知

$$ab\equiv\alpha\beta \pmod{m}.$$

五、有理数和无理数

通过小学和中学里的数学学习，大家对有理数的运算应当是很熟悉的了．所谓有理数，是指那些能够写成两个整数之商的数．也就是说，当 m、n 为整数，且 $m\neq0$ 时，形如 $\frac{n}{m}$

的数叫做**有理数**.

整数是有理数的特例. 因为，设 n 为任一整数，由等式 $n=\frac{n}{1}$ 可知，整数也可以看成是有理数.

设 $\frac{n}{m}$ 和 $\frac{n'}{m'}$ 是两个有理数，于是由下列等式

$$\frac{n}{m}\pm\frac{n'}{m'}=\frac{nm'\pm mn'}{mm'},$$

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{n'}{m'}=\frac{nn'}{mm'},$$

$$\frac{n}{m}\div\frac{n'}{m'}=\frac{nm'}{mn'} \qquad (这里还应设\ n'\neq 0)$$

可知：有理数的和、差、积、商还是有理数. 换句话说，在全体有理数范围内，进行加、减、乘、除四则运算，其结果仍不会越出有理数的范围(当然，在作除法的时候，不允许用零作除数). 这个性质，叫做有理数系统对于四则运算的**封闭性**.

特别，设 a 和 b 是两个有理数，那么可以推知 $\frac{1}{2}(a+b)$ 也是有理数. 要是 $a\neq b$ 时，把 a 和 b 画在数轴上就是不同的两个点，$\frac{1}{2}(a+b)$ 就是这两点联线上的中点. 由此可见，两个不同的有理数的中点必定是一个有理数. 反复地进行这种推理，就可发现：在两个不同的有理数之间，有着无穷多个不同的有理数.

具体来说，线段[0, 1]的两个端点是有理数，它的中点 $\frac{1}{2}$ 是一个有理数；接着再看两条线段 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$，它们各自的中点 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 都是有理数；考察四条更短的线段：

$\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$，它们各自的中点 $\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$ 也是有理数，……，如此等等．一般地，对于任何自然数 n，数列

$$0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1$$

是线段 [0, 1] 上等距离分布的一组有理数，它们相邻两个数之间的距离是 $\frac{1}{2^n}$．只要把正整数 n 取得充分地大，就能使这个距离变得任意地小．由此可以推知，在线段 [0, 1] 之内的随便哪个地方，不论画一条多么短的线段，在这线段之内必然包含着有理数，而且是包含着无穷无尽的有理数．我们把这个性质说成是：有理数在线段 [0, 1] 上是处处稠密的．

设 m 为任一给定的整数，于是将 [0, 1] 中的任何有理数 r 平移 m 个单位之后，得到 $r+m$，它就成了线段 $[m, m+1]$ 上的一个有理数．这就表明：线段 $[m, m+1]$ 中有理数分布的"密度"决不会低于线段 [0, 1] 中有理数的"密度"！由于上述整数 m 可取为 ±1，±2，±3，…，故可推出，不论在数轴上的哪一个地方画一条多么小的线段，这线段中必定包含着无穷无尽的有理数！这就是有理数在整个数轴上的稠密性．

有理数的稠密性，可以通俗地说成：有理数在数轴上"无处不在"！虽然如此，但整个数轴绝不是有理数的"一统天下"．数轴上还有许许多多的不能用有理数来表示的点．最简单的例子是：边长为 1 的正方形的对角线的长度——用符号 $\sqrt{2}$ 来记——不是有理数（图 6）．

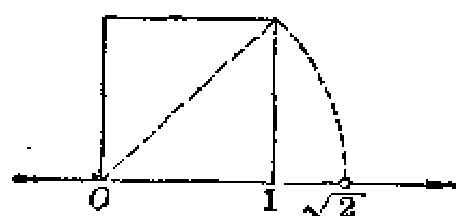


图 6

证明 用反证法来证明上述结论．假若 $\sqrt{2}$ 是有理数，于是有整数 m 和 n，使得

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}, \quad (m\neq 0)$$

并且，不妨设 m 和 n 已不含 2 作为公因数．由勾股定理，得

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=1^2+1^2=2,$$

即 $n^2=2m^2$．由于 $2m^2$ 为偶数，即 n^2 为偶数，于是 n 只能是偶数(因为奇数的平方永远是奇数)．设 $n=2p$，其中 p 为整数．从 $(2p)^2=2m^2$，又可得出 $2p^2=m^2$，进而推得 m 也是一个偶数．m 和 n 都是偶数，这就与 m 和 n 不含公因数 2 矛盾！这个矛盾说明 $\sqrt{2}$ 决不能是有理数．

用类似的办法，可以证明：$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$…都不是有理数．更一般地，我们可以证明

定理一 如果正整数 d 不是某一个整数的平方，那么 $\sqrt{d}$ 就一定不是有理数．

证明 仍旧用反证法来证明．假若 $\sqrt{d}$ 是有理数，即有正整数 m 和 n，使得 $\sqrt{d}=\frac{n}{m}$．无妨设 m 和 n 已经约去了任何大于 1 的公因数．由此可得 $n^2=m^2d$．设 d 的标准素因子分解式为

$$d=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_k^{l_k},$$

其中 p_1，p_2，…，p_k 是 d 的全部互不相同的素因子，l_1，l_2，…，l_k 是一些正整数．由于 d 不是整数的平方，故 l_1，l_2，…，l_k 中至少有一个是奇数．为确定起见，设 l_1 是一个奇数．由等式

$$n^2=m^2p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}$$

可知，必须有 $p_1|n$．设 $n=p_1^s\cdot t$，其中 t 已不能被 p_1 整除．由

此得到

$$p_1^{2s}t^2=m^2p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}.$$

由于 $2s\geqslant l_1$, l_1 又为奇数，实际上是 $2s>l_1$. 即有：

$$p_1^{2s-l_1}t^2=m^2p_2^{l_2}\cdots p_k^{l_k},$$

由此又可推知，必须有 $p_1|m$, 从而 m 和 n 具有素公约数 p_1, 这是一个矛盾. 这个矛盾表明，假设 $\sqrt{d}$ 为有理数是不合理的. 证完.

这样一来，我们已经证明了一大批非有理数的存在性. 数轴上的非有理数，称之为**无理数**.

前已证明 $\sqrt{2}$ 为无理数. 于是，对任何有理数 r, 数 $r+\sqrt{2}$ 一定是无理数. 这是因为，若 $r+\sqrt{2}$ 是有理数，根据有理数系统对减法的封闭性，将得出 $\sqrt{2}=(r+\sqrt{2})-r$ 为有理数，这是不可能的. 这就是说：将每一个有理点在数轴上向右平移同一距离 $\sqrt{2}$, 将得出一批无理点. 由此可以作出以下两个推论：

(i) 数轴上全体无理数的"数目"，决不少于全体有理数的"数目"；

(ii) 数轴上无理数的密集程度决不次于有理数的密集程度. 特别可知，数轴上无理数的全体也是处处稠密的.

现在，我们来证明一个刻划有理数的特性的定理.

定理二 任何一个有理数，一定能表示成十进有穷小数或十进无穷循环小数；反之，任一有穷小数或无穷循环小数，一定是有理数.

证明 显然，我们只须讨论正有理数的情形就可以了.

(i) 对于任意给出的一个正有理数 $\frac{n}{m}$(其中 m, n 均为正整数)，在用 m 去除 n 的过程中，如果经过有穷次计算正好除

尽，那么$\frac{n}{m}$就化成了有穷十进小数.

如果任何有穷次计算仍不能除尽，那么，在商过$\left[\frac{n}{m}\right]$之后，以后每除一次的余数无非是：1, 2, 3…, $m-1$这样有限种可能的情况. 由原则一，充其量作过m次除法之后，必会重复出现同一个余数，在这种情形下，进一步的计算便将重复前面已进行过的过程，这时就化得了十进无穷循环小数.

(ii) 十进有穷小数显然是有理数. 因此只须证明：十进无穷循环小数也是一个有理数. 事实上，

$$
\begin{aligned}
&a_0.a_1a_2\cdots a_n\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_s\\
&=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{10^n}\left(\frac{b_1\cdots b_s}{10^s}+\frac{b_1\cdots b_s}{10^{2s}}+\cdots\right)\\
&=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{b_1b_2\cdots b_s}{10^{n+s}}\left(1+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{10^{2s}}+\cdots\right)\\
&=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{b_1b_2\cdots b_s}{10^{n+s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^s}}\\
&=a_0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^n}\cdot\frac{1}{10^s-1},
\end{aligned}
$$

这显然是一个有理数，证完.

由定理二可以推知无理数的一个特征：无理数就是那些能而且只能表示为十进无穷不循环小数的数.

有理数的全体和无理数的全体组成实数系统. 实数系统可以和整个数轴上的点之间建立一一对应.

最后，建立一个关于用有理数来逼近实数的定理.

用有理数去逼近实数的可能性，可以很容易地由有理数在数轴上的稠密性推出. 任给一个实数α和一个不论多么小的正数ε，以α为中点，在数轴上画出线段$(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$，有理数的稠密性断言，在这个小线段里有无穷多个有理数，它们

中间的任何一个，同 a 的距离当然小于事先给定的很小的正数 ε.

下面的定理三及其证明过程，提供了具体找出这些有理数的途径. 它的更深一层的意思，在证明完毕之后再来细说.

我们先来证明一个引理.

引理 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是适合不等式

$$0\leqslant x_i<1 \qquad (i=0, 1, 2, \cdots, n)$$

的 $n+1$ 个实数，则其中必有两个数 x_k 和 x_l，适合

$$|x_k-x_l|<\frac{1}{n}.$$

证明 把区间 $[0, 1)$ 分成下列 n 个小区间

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

它们两两无公共点，$[0, 1)$ 中的 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 中，按照原则一，必至少有两个点——设为 x_k 和 x_l——属于同一小区间，显而易见

$$|x_k-x_l|<\frac{1}{n}.$$

定理三 设 α 为任一实数，n 为任意给定的正整数，则有一对整数 a、b，使得

$$\left|\alpha-\frac{b}{a}\right|<\frac{1}{na};$$

并且，其中的 a 还适合条件：$0<a\leqslant n$.

证明 令 $m_i=[i\alpha]$，$i=0, 1, \cdots, n$，于是有

$$m_i\leqslant i\alpha<m_i+1,$$

或者

$$0\leqslant i\alpha-m_i<1. \qquad (i=0, 1, \cdots, n)$$

把 $i\alpha-m_i$ 当成引理中的 x_i，于是，有足标 k 和 l，适合 $0\leqslant k<l\leqslant n$，并使得

$$|(l\alpha-m_l)-(k\alpha-m_k)|<\frac{1}{n},$$

即

$$|(l-k)\alpha-(m_l-m_k)|<\frac{1}{n}.$$

置 $a=l-k$, $b=m_l-m_k$, 它们都是整数，并且 $0<a=l-k\leqslant l\leqslant n$, 还使得

$$|a\alpha-b|<\frac{1}{n}.$$

用正数 a 去除上式的两边，这就证得了：

$$\left|\alpha-\frac{b}{a}\right|<\frac{1}{na}.$$

由于 $a\geqslant1$, 故有 $\left|\alpha-\frac{b}{a}\right|<\frac{1}{n}$, 我们可以把 n 取得充分大，以使 $\frac{1}{n}$ 足够小；不等式 $a\leqslant n$ 表明，可以控制有理数 $\frac{b}{a}$ 的分母不致过大. 从这两个意义上来说，我们已经实现了用比较简单的分数来比较精确地逼近一个实数.

六、不定方程

从一个具体的例子谈起.

"百钱买百鸡"是我国古代《张丘建算经》中的名题. 用现代汉语叙述乃是：

[例 1] 小鸡一元钱三只，母鸡三元钱一只，公鸡五元钱一只. 用一百元钱共买一百只鸡，问小鸡、母鸡、公鸡各买几只？

解 用 x、y、z 分别代表小鸡、母鸡、公鸡的只数，根据题设条件，容易写出下面两个方程式

$$x+y+z=100, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{3}x+3y+5z=100. \qquad (2)$$

在这里，未知数的数目比方程式的数目多1. 这里，我们是要寻求它们的非负整数解，而不是一般的解.

用3去乘(2)式的两边，从所得结果中减去(1)式，得

$$8y+14z=200,$$

这也就是

$$4y+7z=100, \qquad (3)$$

这样就消去了一个未知量 x. 由(3)式可以得出

$$7z=4(25-y). \qquad (4)$$

由(4)式可见 $7|4(25-y)$. 但是，7为素数，且除不尽4，故有 $7|(25-y)$. 即有整数 t，使 $25-y=7t$. 这样一来，应有

$$y=25-7t,$$

$$z=4t,$$

我们需要的是非负整数解，故必须 $0\leqslant t<\frac{25}{7}$，即 t 只能取如下四个整数值：0, 1, 2, 3, 对应的四组解是

t	x	y	z
0	75	25	0
1	78	18	4
2	81	11	8
3	84	4	12

“百钱买百鸡”提供了所谓不定方程的比较简单的例子. 不定方程乃是指未知数的数目多于方程的数目，而且未知数

须受某种限制(如整数，正整数或有理数等)的方程. 关于不定方程，在我国古代有过丰富的研究，"百钱买百鸡"仅是这种研究成果之一例.

[例 2] 证明：方程

$$x^2+y^2+z^2=2xyz \tag{5}$$

除 $x=y=z=0$ 而外，无其他整数解.

证明 若三整数 x、y、z 适合方程(5). 这时，(5)式的右边为偶数，从而 $x^2+y^2+z^2$ 也为偶数；这样，就立即排除了 x、y、z 三个都是奇数，以及其中是两偶一奇的情况. 这是因为，在这两种情况下，$x^2+y^2+z^2$ 显然都是奇数. 我们说：两奇一偶的情况也不能出现. 这是因为，假设 $x=2k$, $y=2m+1$, $z=2n+1$, 其中 k, m 和 n 都是整数，于是

$$x^2+y^2+z^2=4k^2+4m^2+4n^2+4m+4n+1+1,$$

从而

$$x^2+y^2+z^2\equiv 2 \pmod 4.$$

可是，(5)式的右边

$$2xyz\equiv 4kyz\equiv 0 \pmod 4,$$

于是(5)式自然不能成立了. 这就是说，只须考察 x、y、z 都是偶数的情况. 设

$$x=2x_1,\quad y=2y_1,\quad z=2z_1, \tag{6}$$

其中 x_1、y_1、z_1 都是整数. 将(6)式代入(5)式，并化简，得

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1. \tag{7}$$

重复同样的推理过程，可以说明 x_1、y_1、z_1 都是偶数. 设

$$x_1=2x_2,\quad y_1=2y_2,\quad z_1=2z_2, \tag{8}$$

其中 x_2, y_2, z_2 均为整数. 将(8)式代入(7)式，并化简，得

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2,$$

......

这种处理可以无止境地进行下去，这就表明：整数 x、y 和 z 中都包含着无穷多个因子 2．这只在 $x=y=z=0$ 时才有可能．

至于 $x=y=z=0$ 适合方程(5)，那是明显的．

例 2 是一个最特殊、最简单的题目．一般来说，决定一个不定方程有没有整数解，决非易事，其复杂性由所谓希尔伯特第十问题及其解决的过程可见．1900 年，德国大数学家希尔伯特(David Hilbert)提出了著名的二十三个数学问题．其中的第十个问题是：是不是可以设计一种算法，一种计算的步骤，来决定一个任意指定的整系数的多项式方程是否具有整数解？问题的回答是否定的，这个答案是经过了很长一段时间才获得的、它是积累了美国数学家鲁宾逊(1952)、戴维斯(1953)、普特曼(1961)和年青的苏联数学家马蒂加斯维克(1970)等人努力的结果．据报道，在证明的过程中，在技巧上巧妙地使用了"孙子定理"(又称中国剩余定理)、"斐波那契数"和"佩尔方程"的一些理论．

下一节，我们正好要来讨论佩尔(Pell)方程．佩尔方程是一种特殊类型的二元二次不定方程，在讨论它的过程中，我们反复地用到了抽屉原则．

七、佩尔方程

考察不定方程

$$x^2-dy^2=1, \tag{1}$$

其中 d 为正整数．如果 d 是某一整数 p 的平方，即 $d=p^2$，则方程(1)可以写为

$$(x-py)(x+py)=1. \tag{2}$$

当 x、y 为方程 (1) 的整数解时，$x-py$ 和 $x+py$ 都是整数，故由(2)式推出

$$\begin{cases} x-py=1, \\ x+py=1, \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x-py=-1, \\ x+py=-1. \end{cases}$$

由此推得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$$

所以，当 d 是一平方数时，方程(1)只有整数解(1, 0)和(−1, 0).

在 d 不等于某一自然数的平方的条件下，方程(1)称为**佩尔方程**. 读者自然要问，佩尔方程除了显然的解 (1, 0) 和 (−1, 0)之外，还有没有其他的整数解？

答案是肯定的.

本节通过初等但冗长的计算和推理，证明佩尔方程有无穷多整数解，并求出它的全部整数解的表达式.

定理一 当 d 不是某一自然数的平方数时，有无穷多对整数(x_i, y_i)，适合

$$|x_i^2-dy_i^2|<2\sqrt{d}+1. \quad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

证明 首先，由于 d 是一个非平方的整数，由第五节的定理一得知，$\sqrt{d}$ 是一个无理数. 依第五节的定理三，对于任意给定的自然数 n_1，有一对整数(x_1, y_1)，使

$$|x_1-\sqrt{d}\,y_1|<\frac{1}{n_1},$$

其中 $1\leqslant y_1\leqslant n_1$. 因此

$$\begin{aligned} |x_1^2-dy_1^2| &= |x_1-\sqrt{d}\,y_1|\cdot|x_1+\sqrt{d}\,y_1| \\ &<\frac{1}{n_1}|x_1+\sqrt{d}\,y_1| \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n_1}|(x_1-\sqrt{d}y_1)+2\sqrt{d}y_1|$$

$$\leqslant\frac{1}{n_1}(|x_1-\sqrt{d}y_1|+2\sqrt{d}y_1)<\frac{1}{n_1}\left(\frac{1}{n_1}+2\sqrt{d}\,y_1\right)$$

$$=\frac{1}{n_1^2}+2\sqrt{d}\frac{y_1}{n_1}\leqslant 1+2\sqrt{d}.$$

由于 $\sqrt{d}$ 为无理数，$x_1-\sqrt{d}y_1\neq 0$，所以

$$|x_1-\sqrt{d}y_1|>0,$$

可取自然数 n_2 适当大，使得

$$\frac{1}{n_2}<|x_1-\sqrt{d}y_1|, \tag{3}$$

对于这个 n_2，又依第五节的定理三，可求得一对整数 (x_2, y_2)，使

$$|x_2-\sqrt{d}y_2|<\frac{1}{n_2}, \tag{4}$$

其中 $1\leqslant y_2\leqslant n_2$. 仿前，仍可推出

$$|x_2^2-dy_2^2|<2\sqrt{d}+1.$$

由(3)式和(4)式，知

$$|x_1-\sqrt{d}y_1|>|x_2-\sqrt{d}y_2|.$$

续行此法以至无穷，可知有 (x_i, y_i)，使得：

$$|x_i^2-dy_i^2|<2\sqrt{d}+1, \qquad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

其中 $y_i\geqslant 1$. 并且，还有

$$|x_1-\sqrt{d}y_1|>|x_2-\sqrt{d}y_2|>|x_3-\sqrt{d}y_3|>\cdots. \tag{5}$$

由(5)式可见，只要 $i\neq j$，就有

$$(x_i, y_i)\neq(x_j, y_j).$$

这就是说，适合条件的整数对 (x_i, y_i)，$i=1, 2, 3, \cdots$，确有无穷多，证完。

定理二 存在一个非零的整数 k，使不定方程

$$x^2-dy^2=k \tag{6}$$

有无穷多整数解.

证明 由定理一得知，有无穷多对整数(x_i, y_i)适合不等式

$$-(2\sqrt{d}+1)<x_i^2-dy_i^2<2\sqrt{d}+1, \quad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

但是，在$-(2\sqrt{d}+1)$与$2\sqrt{d}+1$之间，只隔着有穷个整数，依原则三，在整数列

$$x_1^2-dy_1^2, \quad x_2^2-dy_2^2, \quad x_3^2-dy_3^2, \cdots$$

中，必有无穷项实际上是同一个整数，我们用k来记它．k是一定不会等于零的，这是因为，假若$k=0$，将得出$\sqrt{d}$为有理数．正是这个k值，使得方程(6)有无穷多解，证完．

定理三 佩尔方程(1)除了显然解$(\pm 1, 0)$之外，还有其他整数解．

证明 如果(x, y)是方程(6)的解，显然$(|x|, |y|)$也是方程(6)的解．所以，定理二实际上可以说成：存在无穷多对正整数(ξ_l, η_l)和非零整数k，使

$$\xi_l^2-d\eta_l^2=k. \quad (l=1, 2, \cdots)$$

遵照证明第四节例2时采用过的办法，把整数对(x, y)按其各个坐标关于模$|k|$的剩余分类，可把全部整数对分成$|k|\times|k|=k^2$个互不相交的集合．无穷多个正整数对(ξ_l, η_l)被分配在有限个集合之中，依抽屉原则三，一定至少有两对不同的正整数，如(ξ_i, η_i)和(ξ_j, η_j)，属于同一集合，即有

$$\left.\begin{aligned}\xi_i\equiv\xi_j \quad (\mathrm{mod}\,|k|),\\ \eta_i\equiv\eta_j \quad (\mathrm{mod}\,|k|)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

同时成立．这时

$$\begin{aligned}k^2&=(\xi_i^2-d\eta_i^2)(\xi_j^2-d\eta_j^2)\\&=(\xi_i\xi_j-d\eta_i\eta_j)^2-d(\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i)^2.\end{aligned}$$

由于 $k\neq 0$，即得

$$\left(\frac{\xi_i\xi_j-d\eta_i\eta_j}{k}\right)^2-d\left(\frac{\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i}{k}\right)^2=1. \qquad (8)$$

下面来证明两件事

（i） $\frac{\xi_i\xi_j-d\eta_i\eta_j}{k}$ 和 $\frac{\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i}{k}$ 都是整数；

（ii） $\frac{\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i}{k}\neq 0$.

这两件事与(8)式合在一起，正好表明找到了佩尔方程的非显然解.

先来证(i). 利用(7)式以及第四节中提到的同余式的性质，便可得到

$$\begin{aligned}\xi_i\xi_j-d\eta_i\eta_j&\equiv\xi_i\xi_i-d\eta_i\eta_i\equiv\xi_i^2-d\eta_i^2\\&\equiv k\equiv 0 \pmod{|k|},\end{aligned}$$

以及

$$\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i\equiv 0 \pmod{|k|}.$$

这样就证完了(i). 再来证(ii), 假若

$$\frac{\xi_i\eta_j-\xi_j\eta_i}{k}=0,$$

由此得到

$$\frac{\xi_i}{\xi_j}=\frac{\eta_i}{\eta_j}.$$

用 λ 来记这个公共值，于是有

$$\xi_i^2-d\eta_i^2=\lambda^2(\xi_j^2-d\eta_j^2),$$

此即 $k=\lambda^2k$. 由于 $k\neq 0$, 故 $\lambda^2=1$, 从而 $\lambda=\pm 1$. 但因 ξ_i、ξ_j 均为正数，只能是 $\lambda=1$, 由此得 $\xi_i=\xi_j$ 和 $\eta_i=\eta_j$, 这与 (ξ_i, η_i) 和 (ξ_j, η_j) 是两对不同的正整数的事实相矛盾. 这样就证完了(ii).

注意到(8)式，即知我们已经获得了佩尔方程的异于

$(\pm 1, 0)$的整数解. 定理三到此证毕.

下面求佩尔方程通解的表示法.

定理四 若(x_1, y_1)和(x_2, y_2)都是佩尔方程(1)的整数解,那么,由等式

$$x_3+y_3\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})(x_2+y_2\sqrt{d}) \tag{9}$$

所确定的整数对(x_3, y_3)也是方程(1)的整数解.

证明 事实上,由(9)可得

$$x_3=x_1x_2+dy_1y_2,$$

$$y_3=x_1y_2+x_2y_1.$$

所以有

$$x_3-y_3\sqrt{d}=(x_1-y_1\sqrt{d})(x_2-y_2\sqrt{d}). \tag{10}$$

由(9)式和(10)式,可得

$$\begin{aligned} x_3^2-dy_3^2&=(x_3+y_3\sqrt{d})(x_3-y_3\sqrt{d})\\ &=(x_1+y_1\sqrt{d})(x_1-y_1\sqrt{d})\\ &\quad\times(x_2+y_2\sqrt{d})(x_2-y_2\sqrt{d})\\ &=(x_1^2-dy_1^2)(x_2^2-dy_2^2)=1\times 1=1. \end{aligned}$$

这就证得了(x_3, y_3)也是佩尔方程(1)的整数解,证毕.

如果(x, y)是佩尔方程(1)的整数解,并且$x>0$, $y>0$,则称(x, y)是方程(1)的正解. 设(x_0, y_0)是一切正解(x, y)中使得数$x+y\sqrt{d}$为最小的那个正解,我们有

定理五 佩尔方程的全部正解(x, y)中的x和y,由公式

$$x+y\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^n \tag{11}$$

确定(其中$n=1, 2, 3, \cdots$).

证明 因为(x_0, y_0)是方程(1)的一个正解,反复运用定理四,便可知由公式(11)确定的(x, y)是方程(1)的正解.

反过来,设(x, y)是方程(1)的任何一个正解. 因为

$x_0\geqslant 1$, $y_0\geqslant 1$, 所以 $x_0+y_0\sqrt{d}>x_0\geqslant 1$, 从而数列

$$x_0+y_0\sqrt{d},\quad (x_0+y_0\sqrt{d})^2,\quad (x_0+y_0\sqrt{d})^3,\ \cdots \tag{12}$$

严格上升而趋向于正无穷大. 现在,由于

$$x+y\sqrt{d}\geqslant x_0+y_0\sqrt{d},$$

可知 $x+y\sqrt{d}$ 一定会夹在数列(12)中的某两项之间,亦即有一自然数 n, 使得

$$(x_0+y_0\sqrt{d})^n\leqslant x+y\sqrt{d}<(x_0+y_0\sqrt{d})^{n+1},$$

也就是

$$1\leqslant\frac{x+y\sqrt{d}}{(x_0+y_0\sqrt{d})^n}<x_0+y_0\sqrt{d}. \tag{13}$$

将上式中间那一项改写为

$$(x+y\sqrt{d})[(x_0+y_0\sqrt{d})^{-1}]^n$$
$$=(x+y\sqrt{d})(x_0-y_0\sqrt{d})^n,$$

并记之为 $x'+y'\sqrt{d}$. 由于 $(x_0,\ -y_0)$ 和 $(x,\ y)$ 是方程(1)的整数解,反复运用定理四, 可以得知 $(x',\ y')$ 也是方程(1)的整数解. 在新的记号下,(13)式就是

$$1\leqslant x'+y'\sqrt{d}<x_0+y_0\sqrt{d}. \tag{14}$$

在(14)式中,取倒数,得

$$0<x_0-y_0\sqrt{d}<x'-y'\sqrt{d}\leqslant 1. \tag{15}$$

由(14)式和(15)式,可以推出

$$2x'=(x'+y'\sqrt{d})+(x'-y'\sqrt{d})>1+0=1,$$
$$2y'\sqrt{d}=(x'+y'\sqrt{d})-(x'-y'\sqrt{d})\geqslant 1-1=0.$$

由上述两式可见: $x'>0$, $y'\geqslant 0$. 如果 $y'>0$, 那么 $(x',\ y')$ 是方程(1)的正解, 由(14)式可见, 这与 x_0 及 y_0 为使 $x+y\sqrt{d}$ 最小的那个正解相矛盾. 因此只能是 $y'=0$; 由(14)式与(15)式又得 $x'\geqslant 1\geqslant x'$, 这只能是 $x'=1$, 这也就是说(13)式的中

间那一项实际上等于1，即

$$x+y\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^n.$$

定理五证完.

定理六 佩尔方程的全部整数解(x, y)，由方程

$$x+y\sqrt{d}=\pm(x_0+y_0\sqrt{d})^n \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

所确定.

这一定理的证明是很明显的. $n=0$时，决定着佩尔方程的显然解$(\pm1, 0)$，而当n为自然数时，

$+(x_0+y_0\sqrt{d})^n$ 决定着方程(1)的全部正解；

$-(x_0+y_0\sqrt{d})^n$ 决定着方程(1)的全部负解；

当n为负整数时，由等式

$$(x_0+y_0\sqrt{d})^n=[(x_0+y_0\sqrt{d})^{-n}]^{-1}$$

可见，$(x_0+y_0\sqrt{d})^n$决定着第四象限中双曲线(1)上的全部整点，$-(x_0+y_0\sqrt{d})^n$则决定着第二象限中双曲线(1)上的全部整点.

最后，看一个例子：佩尔方程

$$x^2-3y^2=1$$

有正解$(x_0, y_0)=(2, 1)$，按定理六，其全部整数解(x, y)由等式

$$x+y\sqrt{3}=\pm(2+\sqrt{3})^n \qquad (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

所确定.

例如，令$n=4$，因为

$$(2+\sqrt{3})^4=97+56\sqrt{3},$$

所以(97, 56)就是原方程的一个整数解，这是可以直接代入原方程来验证的.

八、面积的重迭原则

抽屉原则又称为**重迭原则**．实际上，第二节中所叙述的原则一、原则二和原则三，都是最简单的重迭原则．现在，要叙述另外一种重迭原则，这就是关于面积的重迭原则．

假定平面上有 n 个区域(所谓区域，是指由一条平面封闭曲线所围成的内部，例如一个圆或长方形的内部都可以叫做区域)，它们的面积分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$．如果我们把这 n 个区域按任何方式一一搬到某一个面积为 A 的固定区域内部去，那末，当面积的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 大于 A 时，至少有两个区域具有公共点．

这个原则同样是很明显的，也可用反证法加以证明：假如它们搬到固定区域的内部而可以没有公共点，那么，它们的面积的和 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 顶多等于固定区域的面积 A，这跟假设不符合．

自然，对于体积也有类似的重迭原则．

现在，运用关于面积的重迭原则，来证明一个重要而有趣的定理．

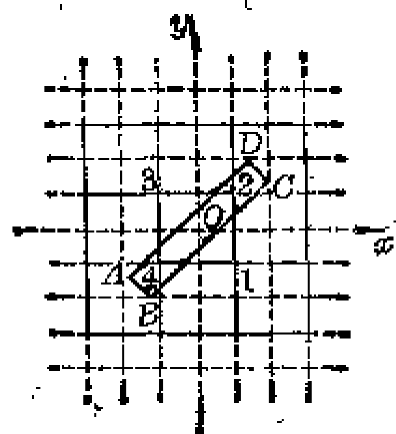


图 7

定理一 以原点 O 为对称中心，任意画一个长方形 $ABCD$ (图 7)．如果这长方形的面积大于 4，那么，在它里面除了 O 点外，一定还有其他的整点．

证明 以那些坐标为偶数的整点 $(2k, 2l)$ 为中心，作出一系列边长为 2

的正方形. 长方形 $ABCD$ 必定被某些这样的 2×2 的正方形所盖住. 把这些正方形一个一个地剪下来, 并把它们平行地移到和中心在 O 的那个 2×2 的正方形 1234 相重合的位置上去. 自然, 这时长方形 $ABCD$ 也被剪碎成好几片移到正方形 1234 里面去了.

注意: 正方形 1234 的面积等于 4, 而长方形 $ABCD$ 的面积是大于 4 的. 根据面积的重迭原则, 至少有两个碎片会有公共点. 设一个公共点的坐标是 (s, t), 其中 $-1\leqslant s\leqslant1$, $-1\leqslant t\leqslant1$. 这就意味着, 在原来的长方形 $ABCD$ 内有一个点 P, 它的坐标是 $(2m+s,\ 2n+t)$; 还有一个点 Q, 它的坐标是 $(2m'+s,\ 2n'+t)$ (图 8).

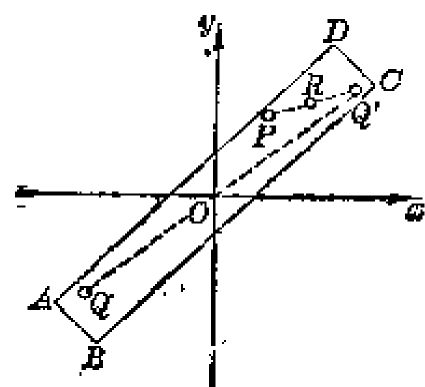


图 8

考察点 Q 关于原点 O 的对称点 Q'. 由于已知长方形 $ABCD$ 关于原点对称, 得知 Q' 必然也在此长方形内. 由对称性可知 Q' 的坐标是 $(-2m'-s,\ -2n'-t)$. 既然 P 和 Q' 是长方形 $ABCD$ 之内的两个点, 那么 P 和 Q' 的联线上的中点 R, 也一定在这个长方形内. 可以算出 R 的两个坐标分别是

$$\frac{(2m+s)+(-2m'-s)}{2}=m-m'$$

和

$$\frac{(2n+t)+(-2n'-t)}{2}=n-n',$$

这表明 R 是包含在长方形 $ABCD$ 中的一个整点, 并且, R 和原点 O 显然是不同的, 这是因为, 若 $R=0$, 即得 $m=m'$, $n=n'$, 也就是 $P=Q$, 这是不可能的. 定理一证毕.

定理一是数论的一个分支:“数的几何”中的一个基本定理的一个特例. 如果读者希望学习这一基本定理,可参阅《格点和面积》一书(闵嗣鹤著,人民教育出版社1964年版).

利用定理一,我们来解决一个非常有趣的几何问题.

[例1] 设有一座圆形的公园,中心为O,半径等于50米. 以点O为坐标原点,选取过O的互相垂直的两条直线为坐标轴,建立平面直角坐标系. 并选取单位长度为1米,如果在圆内除O以外的每个整点处都种上一棵小树,那么,当这些小树长得足够粗的时候,从园子的中心O环顾四周,视线都会被树干所遮断,使人看不到园子的边缘. 现在问,当树干长到多粗时,才会发生所说的这种情况?

我们的答案是:当树干的半径大于$\frac{1}{50}$米(即2厘米)时,从点O朝任何方向看去,视线都会被遮断;而当树干的半径小于$\frac{1}{\sqrt{2501}}$米时,至少在一个方向上视线不会被遮断.

证明 先证答案的第一部分. 我们用ρ表示树干的半径,并设$\rho>\frac{1}{50}$. 显然,还必须认为$\rho\leqslant\frac{1}{2}$.

在圆O中,取任一直径AB(如图9). 过A和B两点分别作圆O的切线,并作两直线FG和EH平行于AB,且与AB的距离均为ρ,这样就得到了一个长方形$EFGH$. 显然,长方形$EFGH$的面积:

$$100\times2\rho>100\times2\times\frac{1}{50}=4.$$

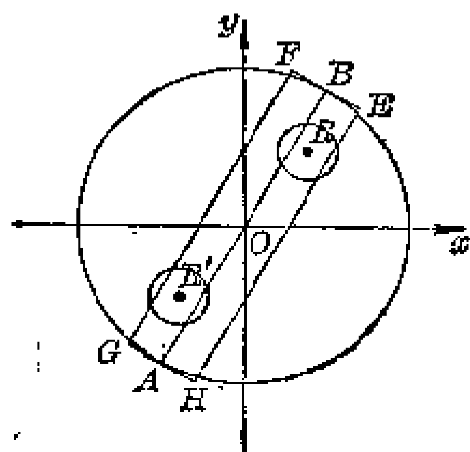


图 9

因此,根据定理一,在这个长方形

内有一个整点 R. 实际上，R 不但在这长方形内，而且还在公园内部，对于这一点，可以证明如下：设 $R=(m, n)$，其中 m 和 n 均为整数. 显然

$$m^2+n^2=\overline{OR}^2\leqslant\overline{OE}^2$$

$$=(50)^2+\rho^2\leqslant(50)^2+\frac{1}{4}.$$

由于 m^2+n^2 是一个整数，上不等式实际上是

$$m^2+n^2\leqslant(50)^2,$$

即是说，R 还在公园之内. R 的关于 O 的对称点 R' 应在此长方形内，并且也在公园之内.

既然 R 和 R' 都是公园内的整点，这两点都不与 O 重合，因此，这些点上是种了树的. 很明显，以 R 和 R' 为中心、以 ρ 为半径作出的两个小圆一定和直径 AB 在 O 的两边相交. 这就是说，当 $\rho>\frac{1}{50}$ 时，OA 和 OB 两个方向的视线都会被树干遮断. 由于直径 AB 是任意作的，所以，这时站在 O 点无论朝哪一个方向上看去，都将看不到公园的边界.

现在证明答案的第二部分. 在坐标为 (50, 0) 的点 P 处作圆 O 的切线，在这切线上取坐标为 (50, 1) 的整点 Q（图 10）. 很明显，在线段 OQ 上不再会有整点了. 在圆内的整点中，离直线 OQ 最近的整点是 R(49, 1). 作 $BS\perp OQ$. 由于

$$\triangle OPQ\backsim\triangle QSR,$$

故有

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{QO}}=\frac{\overline{RS}}{\overline{QP}}.$$

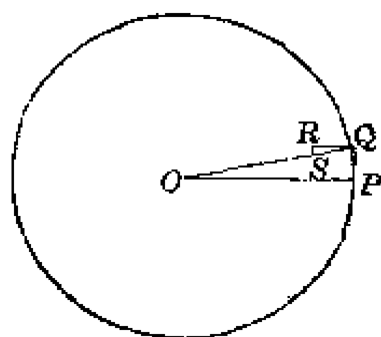


图 10

因此

$$\overline{RS}=\overline{QP}\cdot\frac{\overline{RQ}}{\overline{QO}}$$
$$=1\cdot\frac{1}{\sqrt{(50)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2501}}.$$

所以，当 $\rho<\frac{1}{\sqrt{2501}}$ 时，R 那一点上的树干不会遮断 OQ 方向的视线，其余整点上种的树，就更不可能干扰视线 OQ 了！

讨论完毕.

显然，如果 n 个区域的面积之和小于固定区域的面积，即

$$A_1+A_2+\cdots+A_n<A,$$

那么，把这 n 个区域任意搬到固定区域内部之后，固定区域一定不能被这 n 个区域完全盖住，即固定区域中至少有一个点不属于这 n 个区域中的任何一个区域.

用这样一个至为明显的道理，也可以去解一些有趣的题目.

[例 2] 在一个 20×25 的长方形中任意放进 120 个 1×1 的小正方形. 证明：在这个长方形中，一定还可以放下一个直径为 1 的圆，使之不和这 120 个小正方形中的任何一个相交.

解 我们用反证法来证明. 假设按某一种方式放进 120 个 1×1 的小正方形之后，再也放不进一个直径为 1 的圆，我们将从中引出矛盾.

从长方形 $ABCD$ (图 11) 的每一边剪去一个宽为 $\frac{1}{2}$ 的长条，余下一个 19×24 的长方形 $A'B'C'D'$. 可以算出，长方形 $A'B'C'D'$ 的面积是 456.

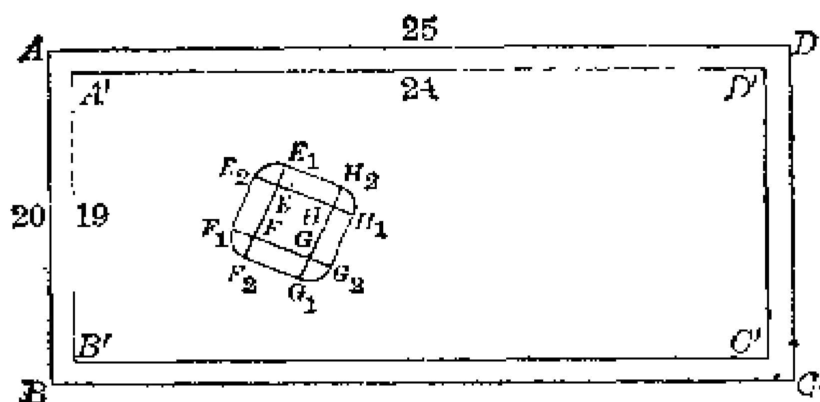


图 11

如果 P 为 $A'B'C'D'$ 内的任一点，以点 P 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径，作一个圆，它一定会全部在长方形 $ABCD$ 之内．依假定，它一定会和某一个 1×1 的小正方形 $EFGH$ 相交，这就是说，P 到 $EFGH$ 的（最短）距离不超过 $\frac{1}{2}$．

在 $EFGH$ 的四条边上各安装一个 $\frac{1}{2}\times1$ 的长条：EE_2F_1F，$FF_2'G_1G$，GG_2H_1H，HH_2E_1H；再在四个角上各安装四分之一个半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆．这样便得到一个图形 $E_1E_2F_1F_2G_1G_2H_1H_2$，这个图形的面积是

$$1+4\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{12+\pi}{4}.$$

由于 P 到 $EFGH$ 的距离不超过 $\frac{1}{2}$，故 P 必落入这一图形中．因为点 P 是在 $A'B'C'D'$ 中任意选取的，我们便可得到这样的结论：长方形 $A'B'O'D'$ 能被 120 个 $E_1E_2F_1F_2G_1G_2H_1H_2$ 那种样子的图形完全盖住．

但是，这是根本不可能的！因为，一方面

$$A'B'C'D' \text{ 的面积}=456,$$

另一方面，120 个那种图形的面积的总和为

$$120\times\frac{12+\pi}{4},$$

但是

$$120\times\frac{12+\pi}{4}<120\times\frac{12+3.2}{4}=30\times15.2=456.$$

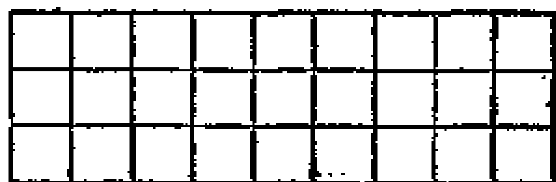
这个矛盾表明：在长方形 $ABCD$ 中任意放进 120 个 1×1 的正方形之后，一定还有一块空地可以放进一个直径为 1 的完整的圆。

练 习 题

运用抽屉原则，解下列各题：(1～7)

1．从全世界任选六个人，其中一定可以找出三个人来，使得他们互相都认识，或者互相都不认识．

2．下图中画出3行9列共27个小方格，将每一个小方格涂上红色或者蓝色．证明：不论如何涂色，其中必至少有两列，它们的涂色的方式相同．



(第2题图)

3．在半径为1的圆周上任取$n+1$个点，求证：其中至少有两个点，它们之间的距离不超过$2\sin\frac{\pi}{n}$．

4．有一个生产天平上用的铁盘的车间，由于工艺上的原因，只能控制盘子的重量在指定的a克到$(a+0.1)$克之间．现在需要重量相差不超过0.005克的两只铁盘来装配一架天平，问最少要有多少盘子，才能从中挑出符合要求的两只铁盘？

5．用N来表示平面上两个坐标都为正整数的点的一个无穷集合，求证：N中一定有两点(α, β)和(ξ, η)，使得

$$\alpha\leqslant\xi,\quad \beta\leqslant\eta.$$

6．在平面上给出了无限多个矩形，它们顶点的直角坐标是$(0, 0)$、$(0, m)$、$(n, 0)$、(n, m)，其中m、n是正整数．证明：在这些矩形中，总存在两个矩形，其中的一个完全落在另一个之内．

7．设有三个由自然数组成的数列：

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots,$$

$$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n,\ \cdots.$$

证明：一定存在一对正整数 p 和 q，使得 $a_p \geqslant a_q$，$b_p \geqslant b_q$，$c_p \geqslant c_q$ 都成立。（1961 年第一届全俄数学竞赛试题）

8．如果正整数 $n \geqslant 2$，求证和数

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

一定不是整数.

9．证明函数 $[x]$ 的下列性质：

（i）$[x]+[y] \leqslant [x+y]$；

（ii）若 n 为正整数，则 $n[x] \leqslant [nx]$；

（iii）若 n 为正整数，则 $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$；

（iv）$[2x]+[2y] \geqslant [x]+[x+y]+[y]$.

10．若 n 为正整数，求证

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

11．证明：任何奇数的平方，关于模 8 与 1 同余.

12．求证：在数列

$$11,\ 111,\ 1111,\ \cdots$$

中，没有完全平方数.

13．求出一个具有下述性质的自然数：个位数字为 2；将这个 2 移到该数最高位数字的左边，得出的新数是原数的两倍.

14．证明：

（i）一个整数能被 3 整除，必须而且只须它的各位数字之和能被 3 整除；

（ii）一个整数能被 9 整除，必须而且只须它的各位数字之和能被 9 整除.

15．设 3^{10000} 的各位数字之和为 a，a 的各位数字之和为 b，b 的各位数字之和为 c，试求出 c.

16．设 $p_n=1^n+2^n+3^n+4^n$（这里 $n=1, 2, 3, \cdots$），问对怎样的自然数 n，5 可以整除 p_n？

运用抽屉原则，并结合剩余类的方法，解下列各题：（17～22）

17．已知 a_1、a_2、$\cdots$、a_7 是正整数，任意改变这七个数的顺序后记为

b_1、b_2、…、b_7. 证明 $A=(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_7-b_7)$是偶数.

18. 求证: 对任一自然数, 必有其某一整倍数, 使之包含着 0, 1, 2, …, 9 中的每一个数字.

19. 对于任一 30 位的整数 M, 可以选得一个数 X, 使能被 1979 整除, 且 X 的最后 30 位数字是 M.

20. 证明: 对于 $n+1$ 个不同的自然数 a_i, 如果每一个均小于 $2n$, 那么可以从中选出 3 个, 使其中的 2 个之和等于第 3 个.

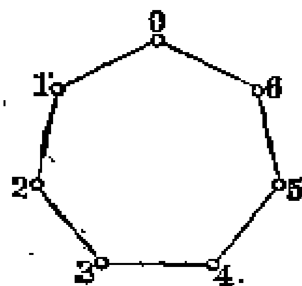
21. 任给五个整数, 证明从中必能选出三个, 使此三数之和能被 3 整除. (安徽省 1978 年中学生数学竞赛试题)

22. 设 m 为任一偶数, m 个整数 a_1, a_2, …, a_m 适合下面两条件:

$$1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m\leqslant m,\quad a_1+a_2+\cdots+a_m=2m.$$

求证: 一定可以把这 m 个数分为两组, 使得每组中各数之和相等, 即都等于 m.

23. 如右图: 一枚棋子放在七角棋盘的第 0 格上, 现依反时针方向按照下述规则来移动这颗棋子: 第一次移动 1 格, 第二次移动 2 格, 第三次移动 3 格, ……, 如此等等. 证明: 不论把棋子移动多少次, 第 2、4、5 号三个位置上总没有停棋的可能.



(第 23 题图)

24. 设 a_1, a_2, …, a_{2n+1} 是 $2n+1$ 个有理数, 它们具有以下性质: 从中任意取出 $2n$ 个, 必能分成两组, 每组中含有 n 个数, 且各组数字之和相等. 求证:

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}.$$

25. 证明不定方程 $x^2-4y^2=3$ 没有整数解.

26. 证明不定方程

$$x^2+1-3y^n=0 \qquad (n\text{ 为任一自然数})$$

没有整数解.

27. 求方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0,\\ x^3+y^3+z^3=-18\end{cases}$$

的全部整数解. (1978 年全国部分省市中学生数学竞赛试题)

运用面积的重迭原则，解下列各题：（28～29）

28．把 66 个直径为 $\sqrt{2}$ 的圆任意放到一个边长为 10 的正方形内，求证必有两个圆有公共点．

29．在一个半径等于 6 的圆内任意地放 6 个半径为 1 的小圆．证明：其中总还有一块空位置，可以完整地放下另一个半径为 1 的小圆．

练习题解答概要

1．把每一个人用一个点代表．若某两个人是互相认识的，则在其"代表点"之间用红边相联；若某两人是互相不认识的，则在其"代表点"之间用蓝边相联．然后，运用第二节例 2 的结论，即可得证．

2．每列中只有三个小方格，每个小方格只有两种不同的涂色方法，因此，每一列只可能有 $2\times2\times2=8$ 种不同的涂色方式．今有 9 列这样的格子，根据原则一，必至少有两列的涂色方式相同．

3．把这个圆周分成 n 等份．根据原则一，至少有两个点在同一段小弧上．显然，这两点之间距离小于圆内接正 n 边形的边长，即 $2\sin\frac{\pi}{n}$．

4．把重量在 a 克到 $(a+0.1)$ 克的盘子，依重量来分类，使得重量不到 $(a+0.005)$ 克的为第一类，重量不小于 $(a+0.005)$ 克但又不到 $(a+0.005\times2)$ 克的为第二类，如此等等，这样一共可分为 20 类．依抽屉原则一，21 个盘子中必至少有两个属于同一类中，它们的重量即相差不超过 0.005 克，用它们即可装配一架天平．

5．从 N 中任取一点 (x_0, y_0)，把 N 中的每一个点 (x, y) 按照下列条件

(1) $x>x_0$, $y>y_0$;

(2) $x>x_0$, $y\leqslant y_0$;

(3) $x\leqslant x_0$, $y>y_0$;

(4) $x\leqslant x_0$, $y\leqslant y_0$

分在四个互不相交的类中．

如果第 (1) 类中至少有 N 的一个点 (ξ, η)，则取 $\alpha=x_0$, $\beta=y_0$，那么适合要求的两点 (α, β) 和 (ξ, η) 就被找到了．同理，若第 (4) 类中至少有 N 的一个点 (α, β)，则取 $\xi=x_0$, $\eta=y_0$，适合要求的两点又被找到了．

所以，只须考察 N 的一切点全部在第(2)类和第(3)类中的情况。

首先，把第(2)类中的点 (x, y) 按下列条件：

$$x>x_0, \quad y=1;$$
$$x>x_0, \quad y=2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x>x_0, \quad y=y_0$$

分成 y_0 个更小的类。同样，再把第(3)类中的点 (x, y) 按下列条件：

$$x=1, \quad y>y_0;$$
$$x=2, \quad y>y_0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x=x_0, \quad y>y_0$$

分成 x_0 个更小的类。这样一来，N 中的点被分配在这 x_0+y_0 个互不相交的小类之中。N 中的点的个数是无穷的，而小类的个数是有穷的，因此，按原则三，必有一个小类中含有 N 中的无穷个点，显然，其中任何两个点都适合要求。

6. 试与第 5 题比较。

7. 参考第 5 题之解法。

8. 把 1, 2, …, n 分解为

$$i=2^{l_i}p_i \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

的形式，其中 p_i 为奇数，整数 $l_i\geqslant 0$。令 l 是 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 中的最大者，$p=p_1p_2\cdots p_n$。设法证明 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 中只有一个数为 l，其余数均小于 l，于是

$$2^{l-1}p\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\text{整数}+\frac{1}{2}\times\text{奇数},$$

故 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 必不能为整数。

9. (i) 由定义，有

$$[x]\leqslant x, \quad [y]\leqslant y.$$

据此，得 $[x]+[y]\leqslant x+y$。故 $[x]+[y]$ 是一个不超过 $x+y$ 的整数，自然不大于 $[x+y]$。

(ii) 由(i)，用数学归纳法即得。

(iii) 先设 $0\leqslant\alpha<1$，于是 $0\leqslant n\alpha<n$，从而有

$$[n\alpha]\leqslant n\alpha<n,$$
$$0\leqslant\frac{[n\alpha]}{n}<1.$$

故

$$\left[\frac{[n\alpha]}{n}\right]=0=[\alpha].$$

再令 $[x]=m$，于是 $x=m+\alpha$，其中 $0\leqslant\alpha<1$。于是

$$nx=nm+n\alpha,$$
$$[nx]=nm+[n\alpha],$$
$$\frac{[nx]}{n}=m+\frac{[n\alpha]}{n}.$$
故得
$$\left[\frac{[nx]}{n}\right]=\left[m+\frac{[n\alpha]}{n}\right]=m+\left[\frac{[n\alpha]}{n}\right]=m+0=m=[x].$$
(iv) 令 $[x]=m$, $[y]=n$, 故
$$x=m+\alpha,\quad 0\leqslant\alpha<1;$$
$$y=n+\beta,\quad 0\leqslant\beta<1.$$
于是
$$[x+y]=[m+n+\alpha+\beta]=m+n+[\alpha+\beta],$$
$$[2x]=[2m+2\alpha]=2m+[2\alpha],$$
$$[2y]=2n+[2\beta].$$
故原不等式等价于
$$[\alpha+\beta]\leqslant[2\alpha]+[2\beta],$$
其中 $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$. 而这个不等式是显然的.

10. 设 $[x]=m$, $x=m+\alpha$, 其中 $0\leqslant\alpha<1$. 因此
$$[x]=m,$$
$$\left[x+\frac{1}{n}\right]=m+\left[\alpha+\frac{1}{n}\right],$$
$$\left[x+\frac{2}{n}\right]=m+\left[\alpha+\frac{2}{n}\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=m+\left[\alpha+\frac{n-1}{n}\right].$$
而 $[nx]=nm+[n\alpha]$, 故原等式等价于等式
$$\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]+\left[\alpha+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[\alpha+\frac{n-1}{n}\right]=[n\alpha],$$
其中 $0\leqslant\alpha<1$. 由于
$$0<\frac{1}{n}\leqslant\alpha+\frac{1}{n}<\alpha+\frac{n-1}{n}<1+\frac{n-1}{n}<2,$$
故前述等式左边每一个整数非 0 即 1.

分两种情况继续讨论. 首先, 若 $\alpha+\frac{1}{n}\geqslant1$, 则上式左边 $=n-1$, 而此时又有 $n-1\leqslant n\alpha<n$, 故: 上式右边 $=n-1$.

其次, 若有自然数 k, 使
$$\alpha+\frac{k}{n}<1,\quad 但\quad \alpha+\frac{k+1}{n}\geqslant1.$$

于是，上等式左边$=n-k-1$；而此时又有

$$n-k-1\leqslant n\alpha<n-k,$$

故上式右边为：$[n\alpha]=n-k-1$。

11．任何奇数均可表为 $2k+1$ 的形式，其中 k 为整数。因为

$$(2k+1)^2=4k(k+1)+1,$$

由于 $k(k+1)$ 可被 2 整除，因此 $4k(k+1)\equiv0 \pmod 8$。于是

$$(2k+1)^2\equiv1 \pmod 8.$$

12．假若此数列中有平方数，那么它必为奇数之平方，由前题可知，它关于模 4 也与 1 同余．但是，对任意大于 2 的自然数 p，有

$$\underbrace{11\cdots111}_{p\text{个}1}=\underbrace{11\cdots1}_{p-2\text{个}1}00+11=\underbrace{11\cdots1}_{p-2\text{个}1}\times25\times4+11,$$

所以

$$11\cdots11\equiv11\equiv3 \pmod 4,$$

这是矛盾的。

13．设此数为 m，且

$$m=\underbrace{\square\cdots\square}_{s\text{位}}2,$$

把 m 去掉个位数字 2 后所得到的数记为 a，于是

$$m=a\times10+2.$$

设新数为 n，依条件 $n=2\times10^s+a$，并且 $n=2m$，即

$$2\times10^s+a=20\times a+4,$$

$$19a=2\times(10^s-2).$$

由此可知，必须有 $19\mid(10^s-2)$，即应选取 s，使

$$10^s\equiv2 \pmod{19}.$$

由于

$$10^2\equiv5 \pmod{19},$$

故

$$10^4\equiv25\equiv6 \pmod{19},$$

$$10^8\equiv36\equiv-2 \pmod{19},$$

$$10^{16}\equiv4 \pmod{19},$$

$$10^{17}\equiv40\equiv2 \pmod{19}.$$

故 $s=17$ 是一个解．所以，原数为 105263157894736842。

14．只证(5)

设 $m=a_0 10^n+a_1 10^{n-1}+\cdots+a_{n-1}10+a_n$，其中 $a_0\geqslant1$，$0\leqslant a_i\leqslant9$，$i=1,2,\cdots,n$。

由于

$$10\equiv1 \pmod 9,$$

故对任何正整数 k，有

$$10^k \equiv 1 \pmod 9).$$

因此

$$m \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \pmod 9).$$

故 $9|m$ 必须且只须 $9|(a_0+a_1+\cdots+a_n)$.

15. 由于 $3^2=9<10$，故

$$3^{10000}=9^{5000}<10^{5000},$$

我们知道，10^{5000} 是最小的五千零一位数．可见 3^{10000} 至多是一个五千位数，所以

$$a \leqslant 9\times 5000 = 45000 < 99999,$$
$$b < 5\times 9 = 45 < 99,$$
$$c < 2\times 9 = 18,$$

由于 3^{10000} 可被 9 整除，因此，反复用 14 题(ii)之结果，得知 c 是一个能被 9 整除的正数，故只能是 $c=9$.

16. 由于 $3\equiv -2 \pmod 5)$，$4\equiv -1 \pmod 5)$，故

$$p_n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \pmod 5).$$

当 n 为奇数的时候，显然 $p_n \equiv 0 \pmod 5)$．今设 n 为偶数：$n=2s$，此时

$$p_{2s} \equiv 2(1+2^{2s}) \equiv 2(1+4^s) \equiv 2(1+(-1)^s) \pmod 5),$$

由此可见，当 s 为奇数时，$5|p_{2s}$；当 s 为偶数时，

$$p_{2s} \equiv 4 \pmod 5).$$

综合上两结果，可知当 n 不是 4 的整倍数时，$5|p_n$.

17. 七个数分成奇数、偶数两类时，按原则二，必有一类至少有四个数．因而，在乘积 A 的七个因数中，至少有一个因数，它的相减的两数在同一类中(即同奇偶)，这一因数即是偶数，从而可推知 A 为偶数．

18. 令 $A=1234567890$，考察数列

$$A,\ AA,\ AAA,\ AAAA,\ \cdots,\ \underbrace{AA\cdots A}_{m+1\text{个}}$$

于是，对任何自然数 m，上数列中必至少有两数属于关于模 m 的同一剩余类．而这两数之差，即为 m 的整倍数，它包含 0, 1, 2, …, 9 中每一数字．

19. 考察数列 $\{m_i\}$:

$$m_1=M,\ m_2=MM,\ \cdots\cdots,\ M_i=\underbrace{MM\cdots M}_{i\text{个}},\ \cdots\cdots,\ M_{1979}=\underbrace{MM\cdots M}_{1979\text{个}}.$$

上述 1979 个数中，假若有一为 1979 的倍数，那么结论便得证了；如果无一被 1979 整除，则必有两数，它们关于模 1979 同余(设为 M_l, M_k，并设 $k>l$)．那么 $1979|(M_k-M_l)$，其中

$$M_k-M_l=\underbrace{MM\cdots M}_{k-l\text{个}}\underbrace{00\cdots 00}_{30l\text{个}}.$$

把 M_k-M_l 的尾数的 $30l$ 个零截去，又得一新数 X，可以证明 X 具有所要求的性质。这是因为 $1979|(M_k-M_l)$，即 $1979|X\times10^{30l}$，而1979与 10^{30l} 互素，故 $1979|X$。

20 不妨设这 $n+1$ 个自然数已排成上升数列：

$$a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n.$$

令 $b_i=a_i-a_0$（其中 $i=1, 2, \cdots, n$）。那么，显然有

$$0<b_1<b_2<\cdots<b_n<a_n<2n.$$

考察 $2n$ 个自然数：$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$。显然它们都小于 $2n$。由原则一，其中必有两数相等，即有 $a_k=b_l$。于是有 $a_l=a_0+a_k$，并由此可知 $l\neq k$。故三个不同的数 a_0、a_k、a_l 符合题目要求。

21. 如果在以3为模的三个不同的剩余类中，每一类都有这五个整数中的某些数，那么从各类都拍一个数出来，三数之和当然能被3整除。若五个整数只分布在两个剩余类中，那么根据原则二，必有一类中至少含三个整数，而此三数之和必定是3的整倍数。

22. 令

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\quad \cdots,\quad s_m=a_1+a_2+\cdots+a_m=2m,$$

又作一整数 (a_1-a_m)，考察下列 $m+1$ 个整数

$$s_1, s_2, \cdots, s_m, (a_1-a_m),$$

根据抽屉原则，它们之中一定有两个数关于模 m 同余。分两种情况来讨论。

(1) 如果有整数足标 i, j 适合 $1\leqslant i<j\leqslant m$ 并使得 $s_j\equiv s_i \pmod m$，即

$$m|(s_j-s_i),$$

由于 $1\leqslant(s_j-s_i)<s_j\leqslant s_m=2m$，所以 $m|(s_j-s_i)$ 只能是 $s_j-s_i=m$，亦即

$$a_{i+1}+\cdots+a_j=m,$$

由此可见，把 $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_j\}$ 当成一组，余下的整数全归为另一组，那么这两组中数字之和将都是 m；

(2) 假如某一个 $s_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 与 (a_1-a_m) 同余，即 $m|(s_i-a_1+a_m)$，这时再细分为三种情况。

(i) 如果 $i=1$，就是 $m|a_m$，但因 $1\leqslant a_m\leqslant m$，故只能是 $a_m=m$，这时两组数

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}\},\quad \{a_m\}$$

有相同的和数；

(ii) 如果 $i=m$，这时 $s_i-a_1+a_m=s_m-a_1+a_m=2m+a_m-a_1$，而 $m|(2m+a_m-a_1)$ 相当于 $m|(a_m-a_1)$，但因 $0\leqslant a_m-a_1<a_m\leqslant m$，故只能是 $a_m-a_1=0$，即 $a_1=a_m$，由题设条件知

$$a_1=a_2=\cdots=a_m=2,$$

这时从中任取 $\frac{m}{2}$ 个数为一组，其余 $\frac{m}{2}$ 个数为另一组，显然这两组数的和相等；

(ii) 设 $2\leqslant i\leqslant m-1$，于是

$$s_i-a_1+a_m=a_2+\cdots+a_i+a_m,$$

但因 $1<a_2+\cdots+a_i+a_m<s_m=2m$，故只能得

$$a_2+\cdots+a_i+a_m=m,$$

这时取$\{a_2, \cdots, a_i, a_m\}$为一组，其余各数归为另一组，显然这两组数符合题目的要求(证完)。

顺便指出，在本题中，即使 m 为一奇数，只要排除 $a_1=a_2=\cdots=a_m=2$ 这一极特殊的情况，本题的结论仍然是成立的。

23. 移动 n 次，共走过

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\quad(\text{格}),$$

实际上，棋子所在的位置应是此数关于模 7 的余数. 设

$$n\equiv r\pmod 7),\qquad 0\leqslant r\leqslant 6,$$

易证

$$\frac{n(n+1)}{2}\equiv\frac{r(r+1)}{2}\pmod 7).$$

对于 $r=0, 1, 2, \cdots, 6$，直接算出停棋位置，可以发现正好不停在第 2、4、5 号格。

24. 容易知道，如果 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 具有题中所描述性质，那么对任何整数 c，数列

$$a_1+c,\ a_2+c,\ \cdots,\ a_{2n+1}+c$$

以及

$$ca_1,\ ca_2,\ \cdots,\ ca_{2n+1}$$

也将具有题中所述性质。

不妨设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 已按从小到大的顺序排列：

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_{2n+1},$$

由于它们都是有理数，用它们的分母的正的最小公倍数遍乘各项，得出的数列

$$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant\cdots\leqslant b_{2n+1}$$

是一整数列，并具有同一性质. 将$(-b_1)$加到每一项上，又得到数列

$$0\leqslant c_2\leqslant c_3\leqslant\cdots\leqslant c_{2n+1},$$

它仍是一整数列，还具有同一性质. 可以证明，这时 $c_2, c_3, \cdots, c_{2n+1}$ 必须全为偶数. 因此，数列

$$0\leqslant\frac{c_2}{2}\leqslant\frac{c_3}{2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{c_{2n+1}}{2}$$

为整数列，并且具有同一性质；再由此推得

$$0,\ \frac{c_2}{2},\ \frac{c_3}{2},\ \cdots,\ \frac{c_{2n+1}}{2};$$

$$0,\ \frac{c_2}{2^2},\ \frac{c_3}{2^2},\ \cdots,\ \frac{c_{2n+1}}{2^2}$$

都是偶数，这样反复推断下去，自然可知

$$c_2=c_3=\cdots=c_{2n+1}=0.$$

于是

$$b_1=b_2=\cdots=b_{2n+1},$$

亦即

$$a_1=a_2=\cdots=a_{2n+1}.$$

25．若方程 $x^2-4y^2=3$ 有整数解 (x, y)，那么

$$x^2\equiv 3 \pmod 4).$$

显然，x 不能是偶数；再由第 11 题，任何奇数的平方关于模 4 与 1 同余，故知 x 也不能是奇数，这是矛盾的。

26．若方程 $x^2+1=3y^n$ 有整数解 (x, y)，那么

$$x^2+1\equiv 0 \pmod 3).$$

上述同余式是不能被任何整数 x 所满足的。

27．因为有恒等式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),$$

于是，当 $x+y+z=0$ 时，就有

$$x^3+y^3+z^3=3xyz.$$

但 $x^3+y^3+z^3=-18$，故 $xyz=-6$，因此只能是如下六种情况：

$$\left.\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}1\\2,\\-3\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}1\\-3,\\2\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}2\\1,\\-3\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}2\\-3,\\1\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}-3\\1,\\2\end{matrix}\right.\left\{\begin{matrix}-3\\2.\\1\end{matrix}\right.$$

28．每一个圆的面积为 $\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi$，66 个小圆的面积的总和为

$$66\times\frac{1}{2}\pi=33\times\pi=33\times 3.1415\cdots>33\times 3.1=102.3.$$

这个数字大于正方形的面积 $10\times 10=100$。由面积的重迭原则，知必有两个圆有公共点。

29．证明的思想方法和第八节中例 2 的证法完全相同。可用反证法。假若在大圆中放下 6 个小圆之后再也找不到放另外一个小圆的地方，那么 6 个半径等于 $1+1=2$ 的圆将完全盖住一个半径等于 $6-1=5$ 的圆。这是不可能的，因为

$$6\pi\times 2^2=24\pi<25\pi=\pi\times 5^2.$$